

-
1. Lös differentialekvationen $y'' + 2y' - 3y = 8xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. (7p)
2. Bestäm konvergensintervallet och summan för potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^k}{k} x^{3k}$. (7p)
3. a) Beräkna $\cos(0.1)$ approximativt med Maclaurinpolynomet av grad 2. (4p)
Ange också en felgräns !
- b) Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{24 \cos x + 12x^2 - 24}{x^2 - x \sin x}$. (4p)
4. För vilka reella tal p och q konvergerar följande serier (8p)
- a) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sin(n^{-p})$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^q (\ln n)^2}$
5. Vid numerisk lösning av differentialekvationen $y' + ay = f(t)$ kan man ersätta derivatan y' med differenskvoten $\frac{y(t+h) - y(t)}{h}$ där h är ett fixt men litet tal, (Eulers metod). (8p)
Genom att sätta $t = nh$, $y_n = y(nh)$ och $d_n = f(nh)$ där $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ diskretiserar differentialekvationen och en approximerande differensekvation erhålls istället. Sätt upp differensekvationen i fallet $a = 1$ och $f(t) = t$ och med begynnelse-data $y(0) = 0$. Jämför sedan lösningen till differensekvationen med lösningen till den ursprungliga differentialekvationen.
6. Låt c vara ett godtyckligt reellt tal. Sätt $f_n(x) = n^c x(1 - x^2)^n$, $0 \leq x \leq 1$. (7p)
Visa först att $f_n(x) \rightarrow 0$ punktvis på $[0, 1]$. Undersök sedan för vilka c som funktionsföljden $f_n(x)$ konvergerar likformigt på $[0, 1]$.
7. Formulera och bevisa Maclaurins formel med Lagranges restterm. (8p)
8. Visa att om potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar i punkten $x_0 \neq 0$, så konvergerar (7p)
serien absolut för alla x sådana att $|x| < |x_0|$.