Lösning till tentamen i Reell matematisk analys F, del A den 13/12 2003

1. Karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r + 1 = 0$ med lösning $r_{1,2} = -1$. Därför är homogenlösningen $y_n^{(h)} = (C_1 + C_2 n)(-1)^n$. Eftersom 1 inte är en karakteristisk rot, ansätts en partikulärlösning $y_n^{(p)} = an^2 + bn + c$. Insättning ger

$$\begin{aligned} y_{n+2}^{(p)} + 2y_{n+1}^{(p)} + y_n^{(p)} &= a(n+2)^2 + b(n+2) + c + 2[a(n+1)^2 + b(n+1) + c] + an^2 + bn + c \\ &= 4an^2 + (8a + 4b)n + 6a + 4b + 4c = n^2. \end{aligned}$$

Alltså skall vi ha $4a = 1$, $8a + 4b = 0$, $6a + 4b + 4c = 0$, dvs. $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{8}$. Allmänna lösningen är $y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = \underline{(C_1 + C_2 n)(-1)^n + \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{8}}$.

---

2. a)

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x^2) - \sin^2 x}{1 - \cos(x^2)} &= \frac{x^2 - \frac{1}{2}x^4 + O(x^6) - [x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)]^2}{1 - [1 - \frac{1}{2}x^4 + O(x^8)]} = \frac{x^2 - \frac{1}{2}x^4 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + O(x^6)}{\frac{1}{2}x^4 + O(x^8)} \\ &= \frac{-\frac{1}{6}x^4 + O(x^6)}{\frac{1}{2}x^4 + O(x^8)} = \frac{-\frac{1}{6} + O(x^2)}{\frac{1}{2} + O(x^4)} \to \boxed{-\frac{1}{3}} \text{ då } x \to 0. \end{aligned}$$

b) Om $f(x,y) = \frac{\sin(xy^2)}{xy^2 + x^3}$ (definierad för $x \neq 0$), är $f(x,0) = 0$ för alla $x \neq 0$, medan $f(x,x) = \frac{\sin(x^3)}{2x^3}$ som går mot $\frac{1}{2}$ då $x \to 0$. Alltså saknas gränsvärde då $(x,y) \to (0,0)$.

---

3. 1. Karakteristiska ekvationen är $r^3 + r^2 + 4r + 4 = r^2(r+1) + 4(r+1) = (r+1)(r^2+4) = 0$ med lösningar $r_1 = -1$, $r_{2,3} = \pm 2i$. Homogenlösningen är $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$.

2. Högerledet är $x + \cos^2 x = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$. Sök först en partikulärlösning till $y''' + y'' + 4y' + 4y = x + \frac{1}{2}$. Ansätt $y_{p,1} = ax + b$. Insättning ger

$$4a + 4(ax + b) = 4ax + 4a + 4b = x + \frac{1}{2},$$

varav $4a = 1$, $4a + 4b = \frac{1}{2}$, dvs. $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{8}$, och $y_{p,1} = \frac{x}{4} - \frac{1}{8}$.

Sök sedan en partikulärlösning $y_{p,2}$ till $y''' + y'' + 4y' + 4y = \frac{1}{2}\cos 2x$. Om u_p är en partikulärlösning till $u''' + u'' + 4u' + 4u = \frac{1}{2}e^{2ix}$, är $y_{p,2} = \operatorname{Re} u_p$. Skriv $u = ze^{2ix}$ och använd förskjutningsregeln:

$$\begin{aligned} u''' + u'' + 4u' + 4u &= (D+1)(D^2+4)[ze^{2ix}] = e^{2ix}(D + 2i + 1)((D+2i)^2 + 4)[z] \\ &= e^{2ix}(D + 2i + 1)(D^2 + 4iD)[z] = e^{2ix}(D^3 + (6i+1)D^2 + (-8+4i)D)[z] = \frac{1}{2}e^{2ix}. \end{aligned}$$

Alltså är z lösning till $z''' + (6i+1)z'' + (-8+4i)z' = \frac{1}{2}$, och vi ansätter $z_p = cx$. Insättning ger $(-8+4i)c = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{8(-2+i)} = \frac{-2-i}{8 \cdot 5} = -\frac{1}{40}(2+i)$, så att $u_p = -\frac{x}{40}(2+i)e^{2ix}$, $y_{p,2} = \operatorname{Re} u_p = -\frac{x}{40}\operatorname{Re}[(2+i)(\cos 2x + i \sin 2x)] = -\frac{x}{40}(2\cos 2x - \sin 2x)$.

3. Allmänna lösningen till den givna ekvationen är

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + \frac{x}{4} - \frac{1}{8} - \frac{x}{40}(2\cos 2x - \sin 2x)$$

---

4. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(k+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2}$.

$$\begin{aligned} x^2 f''(x) + xf'(x) + (x^2 - 4)f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+2)(2k+1)}{k!(k+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+2}{k!(k+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{(k-1)!(k+1)!} 4\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k!(k+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2}. \end{aligned}$$

Se på koefficienten för $(\frac{x}{2})^{2k+2}$. För $k=0$ är den $\frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}+\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{4}{1\cdot 2}=0$. För $k\geq 1$ fås

$$\begin{aligned}(-1)^k\frac{(2k+2)(2k+1)}{k!(k+2)!}+(-1)^k\frac{2k+2}{k!(k+2)!}+(-1)^{k-1}\frac{4}{(k-1)!(k+1)!}-(-1)^k\frac{4}{k!(k+2)!}\\ =(-1)^k\frac{(2k+2)(2k+1)+2k+2-4k(k+2)-4}{k!(k+2)!}=0.\end{aligned}$$

Alltså satisfierar $f(x)$ differentialekvationen $x^2y''+xy'+(x^2-4)y=0$.

---

5. Studera potensserien $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$.

$$\begin{aligned}a_n&=\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{n^2\ln\cos\frac{1}{n}}=e^{n^2\ln[1-\frac{1}{2n^2}+O(\frac{1}{n^4})]}=e^{n^2[-\frac{1}{2n^2}+O(\frac{1}{n^4})]}=e^{-\frac{1}{2}+O(\frac{1}{n^2})},\\ \sqrt[n]{|a_n|}&=e^{-\frac{1}{2n}+O(\frac{1}{n^3})}\to 1\quad \text{då } n\to\infty.\end{aligned}$$

Alltså är konvergensradien 1. För $x=\pm 1$ fås serien $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$, och enligt ovan går allmänna termens absolutbelopp inte mot 0 då $n\to\infty$ (utan mot $e^{-\frac{1}{2}}$); serien divergerar. Den givna serien är alltså konvergent precis då $-1<x<1$.

---

6. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x+n)^2e^{-(x+n)}$. a) För $0\leq x\leq 1$ är $(x+n)^2e^{-(x+n)}\leq (n+1)^2e^{-n}\leq\frac{C}{n^2}$ för någon konstant C (eftersom $n^2(n+1)^2e^{-n}\to 0$ då $n\to\infty$). Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^2}$ är konvergent, ger Weierstrass' majorantsats att $\sum_{n=0}^{\infty}(x+n)^2e^{-(x+n)}$ är likformigt konvergent på $[0,1]$.

b) På grund av den likformiga konvergensen gäller att

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1(x+n)^2e^{-(x+n)}\,dx=[x+n=t]=\sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+1}t^2e^{-t}\,dt\\ &=\int_0^{\infty}t^2e^{-t}\,dt=[-t^2e^{-t}]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}2te^{-t}\,dt=[-2te^{-t}]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}2e^{-t}\,dt\\ &=[-2e^{-t}]_0^{\infty}=\boxed{2}.\end{aligned}$$
