Lösning till tentamen i Reell matematisk analys F, del A den 17/4 2004

1. a) Skriv ekvationen som $y' + \frac{2}{x+1}y = \frac{x^2}{x+1}x$. Den är linjär med en integrerande faktor $e^{\int \frac{2}{x+1}dx} = e^{2\ln(x+1)} = (x+1)^2$. Multiplicera alltså ekvationen med $(x+1)^2$. Då fås $\frac{d}{dx}((x+1)^2y) = (x+1)^2y' + 2(x+1)y = x^2(x+1)$, $(x+1)^2y = \int(x^3+x^2)dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$. Villkoret $y(0) = 1$ ger $1 = C$, och $\underline{\underline{y = \frac{\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+1}{(x+1)^2}}}$.

   b) Ekvationen $(x+1)y' = y^2$ är separabel. Om $y \neq 0$ och $x \neq -1$ kan ekvationen skrivas $\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x+1}$, och lösningen ges av $\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x+1}$, $-\frac{1}{y} = \ln|x+1| + C$. Villkoret $y(0) = 1$ ger $C = -1$, och $\underline{\underline{y = \frac{1}{1-\ln(x+1)}}}$.

---

2. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2n^2-1}$. Allmänna termen alternerar i tecken. Dess absolutbelopp är $\frac{n}{2n^2-1}$, som går avtagande mot 0 då $n \to \infty$ (för att visa avtagandet, studera funktionen $\frac{x}{2x^2-1}$ vars derivata $-\frac{2x^2+1}{(2x^2-1)^2}$ är negativ). Enligt Leibniz' kriterium är serien konvergent. Men $\sum_1^{\infty} \frac{n}{2n^2-1}$ är divergent (jämför med $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$). Alltså är serien $\underline{\text{betingat konvergent}}$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1+\frac{1}{n})$. Allmänna termen är $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{\sqrt{n}}[\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2})]$. Jämför med $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$. Då är $\frac{a_n}{b_n} = 1 + O(\frac{1}{n}) \to 1 > 0$ då $n \to \infty$. Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent, så är också $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\underline{\text{(absolut)konvergent}}$.

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(1+n^2)}$. För $n \geq 2$ är $\frac{\ln(1+n^2)}{\ln n} \leq \frac{\ln(2n^2)}{\ln n} = \frac{\ln 2}{\ln n} + \frac{2\ln n}{\ln n} \leq 3$ och $\frac{1}{n\ln(1+n^2)} \geq \frac{1}{3}\frac{1}{n\ln n}$. Eftersom $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ är divergent (välkänt; om inte, använd integralkriteriet och det faktum att $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = [\ln\ln x]_2^{\infty} = \infty$), varför den givna serien är $\underline{\text{divergent}}$.

---

3. 1. Karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r - 3 = 0$ med rötter $r_1 = 1$, $r_2 = -3$. Allmänna lösningen till homogena ekvationen är $y_h = C_1e^x + C_2e^{-3x}$.

   2. Då 1 är en enkelrot till karakteristiska ekvationen, ansätts en partikulärlösning $y_p = x(ax+b)e^x = (ax^2+bx)e^x$. Då är

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' - 3y_p &= 2ae^x + 2(2ax+b)e^x + (ax^2+bx)e^x + 2((2ax+b)e^x + (ax^2+bx)e^x) - 3(ax^2+bx)e^x \\ &= 2\,(4ax + a + 2b)\,e^x = (x+1)e^x. \end{aligned}$$

   Alltså är $8a = 1$ och $2(a+2b) = 1$, vilket ger $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{3}{16}$.

   3. Allmänna lösningen till den givna ekvationen är $\underline{\underline{y = C_1e^x + C_2e^{-3x} + (\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{16}x)e^x}}$.

4.
$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x-1} - \frac{a\ln(1+2x)}{x\tan x} &= \frac{x\tan x - a(e^x-1)\ln(1+2x)}{(e^x-1)x\tan x} \\ &= \frac{x(x+O(x^3)) - a(x+\frac{1}{2}x^2+O(x^3))(2x-\frac{1}{2}4x^2+O(x^3))}{(x+O(x^2))x(x+O(x^3))} \\ &= \frac{x^2+O(x^4) - a(2x^2-2x^3+x^3+O(x^4))}{x^3+O(x^4)} \\ &= \frac{(1-2a)x^2+ax^3+O(x^4)}{x^3+O(x^4)}. \end{aligned}$$

För att gränsvärde då $x \to 0$ skall kunna existera måste $\underline{a = \frac{1}{2}}$. I så fall blir uttrycket

$$\frac{\frac{1}{2}x^3+O(x^4)}{x^3+O(x^4)} = \frac{\frac{1}{2}+O(x)}{1+O(x)} \to \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \quad \text{då } x \to 0.$$

---

5. *Metod 1.* Visa att talföljden är växande och uppåt begränsad. *Om* så är fallet, finns ett gränsvärde α, som måste satisfiera $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha+1}$, $\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\alpha+1}$, $\alpha^2 - 4\alpha - 4 = 0$, $\alpha = 2 \pm \sqrt{8}$. Men $\alpha > 0$, så $\alpha = 2 + 2\sqrt{2}$. För kommande bruk noterar vi att $x^2 - 4x - 4 = (x-\alpha)(x-2+2\sqrt{2})$.

Det gäller att $x_0 = 1 < \alpha$. Om $0 < x_n < \alpha$ för något n, följer att $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n + 1} < \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha + 1} = \alpha$ och även $x_{n+1} > 0$. Alltså är $0 < x_n < \alpha$ för alla n. Vidare är

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n + 1} = \frac{x_n + 1 - \frac{x_n^2}{4}}{\frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n + 1}} = -\frac{1}{4}\frac{x_n^2 - 4x_n - 4}{\frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n + 1}}$$
$$= -\frac{1}{4}\frac{(x_n - \alpha)(x_n - 2 + 2\sqrt{2})}{\frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n + 1}} > 0,$$

ty $0 < x_n < \alpha$. Alltså är följden växande och uppåt begränsad, och enligt ovan vet vi då att $\underline{\lim_{n\to\infty} x_n = 2 + 2\sqrt{2}}$.

Metod 2. Använd satsen om fixpunktsiteration. Vi har $x_{n+1} = f(x_n)$, där $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{x + 1}$. Låt I vara intervallet $[1, 8]$. $x_0 \in I$. Om $x \in I$ så följer $f(x) \geq \frac{1}{2} + \sqrt{2} > 1$, och $f(x) \leq 4 + \sqrt{9} < 8$, dvs. $f(x) \in I$. Vidare är $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$, och för $x \in I$ är $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$. Enligt en sats konvergerar då x_n mot den entydigt bestämda roten α till ekvationen $x = f(x)$ i I. Som ovan fås $\alpha = 2 + 2\sqrt{2}$.

---

6. Ansätt en lösning $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Om konvergensradien R är positiv, gäller för $|x| < R$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1},$$
$$2xy'' - y = \sum_{n=0}^{\infty} 2n(n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [2n(n+1) a_{n+1} - a_n] x^n = 0.$$

Alltså är $2n(n+1)a_{n+1} - a_n$ för alla n. $n = 0$ ger $a_0 = 0$, och för $n > 0$ är $a_{n+1} = \frac{1}{2n(n+1)} a_n$. Vi får

$$a_2 = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2} a_1, \quad a_3 = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3} a_2 = \frac{1}{2^2 (1 \cdot 2)^2 3} a_1, \quad a_4 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} a_3 = \frac{1}{2^3 (1 \cdot 2 \cdot 3)^2 4} a_1.$$

Allmänt fås $a_n = \frac{1}{2^{n-1}[(n-1)!]^2 n} a_1$. Eftersom $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2n(n+1)} \to 0$ då $n \to \infty$, är $R = \infty$. Alltså ger

$$y = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}[(n-1)!]^2 n} x^n$$

en lösning till differentialekvationen för alla x.
