Kompletterande övningar till Matematisk analys i flera variabler

1. Låt $\mathbf{x} = (1, -1, 0, 2)$ och $\mathbf{y} = (3, -1, 1, 1)$.
   (a) Beräkna $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.
   (b) Beräkna vinkeln mellan $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$.
   (c) Beräkna vinkeln mellan $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ och $\mathbf{x} + \mathbf{y}$.

2. Låt $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ vara vektorer i $\mathbf{R}^n$. Visa att $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = 2|\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{y}|^2$. Detta utryck kallas paralleogramsatsen. Motivera varför.

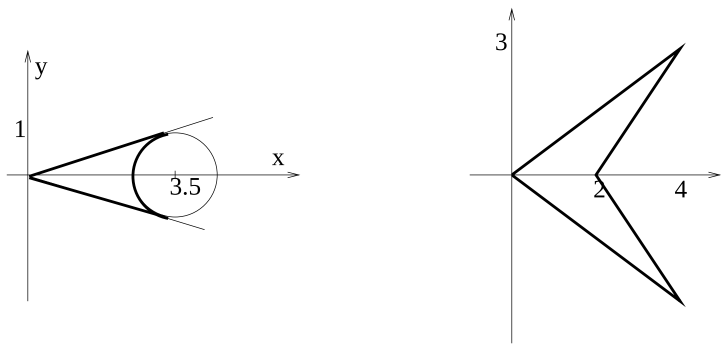
3. Bestäm de polära koordinaterna för följande punkter i $\mathbf{R}^2$
   a) $(1, -\sqrt{3})$ b) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ c) (-3.4) .

4. En mängd i $\mathbf{R}^2$ kan beskrivas i polära koordinater med ekvationen $r^2 \cos v = 2$. Rita mängden.

5. Bestäm de sfäriska koordinaterna till
   a) $(\sqrt{3}, 1, 2)$, b) $(1, 1, -\sqrt{2})$

6. Rita en mängd i $\mathbf{R}^3$, vars sfäriska koordinater (r, θ, ϕ) uppfyller villkoren $r_1 < r < r_2$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$, $\phi_1 < \phi < \phi_2$.

7. Beskriv nedanstående mängder analytiskt.



Mängder till uppgift 7a och 7b

8. Rita kurvan $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(nt)$, för $0 < t < 2\pi$, och för $n = 1, 2, 3$.

9. Vilka av följande mängder i $\mathbf{R}^2$ är öppna? Slutna? Begränsade? Kompakta?
   (a) $\{(x, y); 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$
   (b) $\{(x, y); x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1\}$
   (c) $\{(x, y); x = 1\}$
   (d) $\{(x, y); x = 1, y > 10\}$
   (e) $\{(x, y); |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$
   (f) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
   (g) $\bigcup_{n \geq 1} \{(n, n^2)\}$
   (h) $\{(x, y); x^2 + 3y^2 < 1/n\}$, $n \in \mathbf{N}$

(i) $\bigcap_{n\geq 1}\{(x,y); x^2+3y^2<1/n\}$

10. Beskriv kurvan $\{(x,y,z); 2x^2+y^2=3, z=x^2\}$ i parameterform, dvs på formen $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $a\leq t\leq b$.

11. Visa att om n är ett godtyckligt heltal, och om A och B är godtyckliga reella tal, så är funktionen $f(x,t)=e^{-n^2bt}(A\cos nx+B\sin nx)$ en lösning till värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{b}\frac{\partial f}{\partial t}$$

12. Visa att om f och g är $\mathcal{C}^2$-funktioner av en variabel, så är $u(x,t)=f(x+ct)+g(x-ct)$ en lösning till vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$