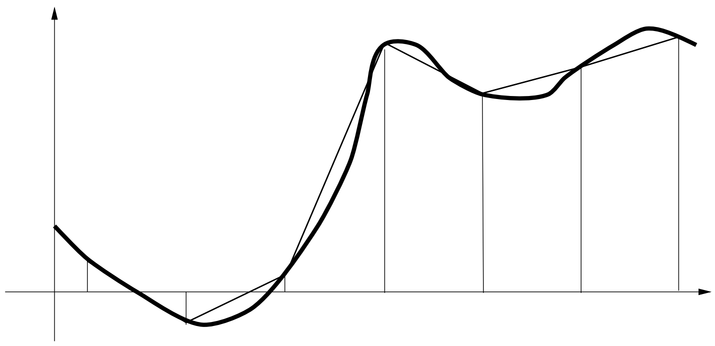
Datorlaboration for Flerdimensionell matematisk analys F

Monte Carlo-metoden för numerisk beräkning av flerdimensionella integraler

Syftet med den här laborationen är att demonstrera hur man kan beräkna flerdimensionella integraler approxmativt med den så kallade Monte Carlo-metoden. Vi kommer inte att göra någon matematisk analys av hur effektiv och noggrann metoden är, eftersom detta inte är lätt att göra utan att först läsa en kurs i matematisk statistik.

De vanligaste metoderna för att beräkna endimensionella bestämda integraler med hjälp av dator, går ut på att man delar in integrationsområdet i små intervall, och sedan approximerar man integranden med ett polynom i vart och ett av intervallen.



I figuren ovan visas trapetsmetoden, som innebär att man approximerar integranden på varje intervall med en linjär funktion. Man kan göra samma sak med en två- eller tredimensionell integral: då delar man in integationsområdet t.ex. i trianglar (tetraedrar), och sedan approximeras integranden med den linjära funktion som har rätt värden i triangelns (tetraederns) hörnpunkter. Man kan också välja att approximera integranden med polynom av högre ordning. Jämfört med det endimensionella fallet finns det åtminstone två problem med detta. Det första är att om inte området har speciell form, så kan det inte delas in exakt i trianglar eller tetraedrar. Det andra är, att om man vill öka noggrannheten genom att minska delområdenas storlek, så ger en åttadubbling av antalet tetraedrar respektive en fyrdubbling av antalet trianglar samma noggrannhetsförbättring som en fördubbling av antalet intervall i det endimensionella fallet. Ibland kan man behöva beräkna integraler i mycket högre dimension än tre, och då går det åt $2^{\text{dimension}}$ gånger så många delområden för att motsvara en fördubbling av antalet delintervall. Även med nutidens datorer kan det bli orimligt mycket räknearbete för en given noggrannhet.

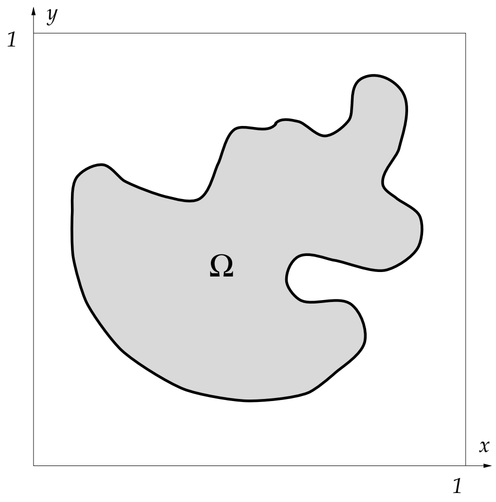
En enkel metod som kan vara en lösning på båda problemen är den så kallade Monte Carlo-metoden. Vi skall först se hur den kan användas till att beräkna arean av områden i planet. Området Ω i figuren överst på följande sida är inritat i en ruta som är 1×1 *a.e.*. Antag att området har arean $A < 1$ *a.e.*. Om man väljer två koordinater $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y \leq 1$ slumpvis, så är sannolikheten att punkten (x, y) ligger i området Ω precis A (man måste ställa en del krav på hur området ser ut, för att detta påstående skall vara sant). Om man nu väljer N punkter, (x_i, y_i), $1 \leq i \leq N$, så borde i genomsnitt $A \times N$ av punkterna ligga inom det markerade området. Detta är idén bakom Monte Carlo-metoden:

1. Välj N punkter (x_i, y_i) slumpvis i rutan $\{(x, y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

2. Undersök hur många av de N punkterna som ligger i område Ω. Kalla detta antal för M.

3. Tag $A \approx M/N$ som en approximation av områdets area.

Man kan visa att beräkningsfelet med denna metod i snitt avtar som $1/\sqrt{N}$. Man måste ställa vissa villkor på området för att detta skall stämma, men för de flesta områden man kan tänkas komma på, så är det sant.



Man kan också beskriva metoden på ett något annorlunda sätt, som passar bättre för att beräkna tvådimensionella integraler. Vi definierar en funktion $\chi_\Omega(x,y)$ genom

$$\chi_\Omega(x,y) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{om} \quad (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \quad .$$

Funktionen $\chi_\Omega(x,y)$ brukar kallas *karaktäristisk funktion* till mängden Ω (ibland mängdens *indikatorfunktion*). Om man har valt de N punkterna slumpvis som tidigare blir nu

$$A \quad \approx \quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \chi_\Omega(x_i,y_i)\,.$$

Här har vi egentligen sagt att arean av ett område är precis samma sak som integralen av funktionen som är konstant lika med ett över hela området. Om man istället vill beräkna en dubbelintegral,

$$I \quad = \quad \iint_\Omega f(x,y)\,dxdy\,,$$

så gör man precis på samma sätt, fast nu blir

$$I \quad \approx \quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \chi_\Omega(x_i,y_i) f(x_i,y_i)\,.$$

Som metoden är beskriven här, fungerar den bara om området Ω är ändligt (man kan förstås göra en större ruta än 1×1 om det behövs), och om funktionen $f(x,y)$ är begränsad, men det finns trick för att lösa de fall där dessa krav inte är uppfyllda.

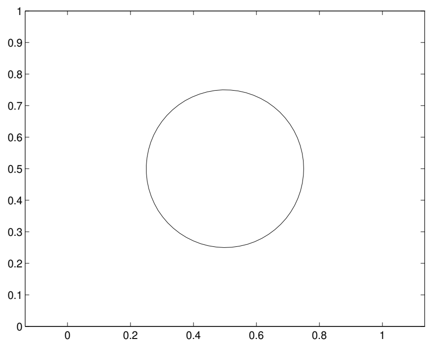
Laborationsuppgift

I figuren nedan ges området Λ av

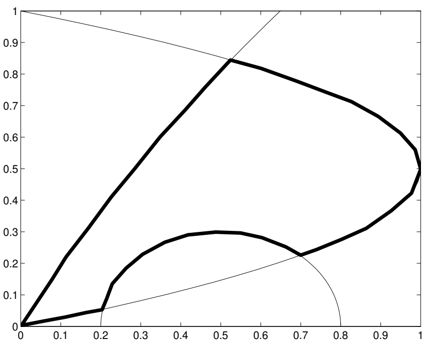
$$\Lambda \quad = \quad \{(x,y); (x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 < 1/16\}\,,$$

och Γ består av det område som definieras av olikheterna

$$\begin{aligned} y - 2\ln(1+x) &< 0\,, \\ x + 4(y-1/2)^2 &< 1\,, \quad \text{och} \\ (x-1/2)^2 + y^2 &> 0.09\,. \end{aligned}$$



Området Λ.



Området Γ.

1. Använd Monte Carlo-metoden för att beräkna arean av området Λ. Testa med antal punkter $N = 10, 100, 1000, 10000$, och utför varje test femton gånger. Jämför resultaten med det exakta värdet, och studera också hur värdet varierar från gång till gång då N hålls fixt.
2. Beräkna arean av området Γ
3. Använd Monte-Carlo-metoden till att beräkna integralen

$$\iint_{\Gamma} (x^2 + y^2)\, dxdy\,.$$

Det enklaste är kanske att utföra uppgiften med hjälp av matlab, men den som vill använda ett annat programmeringsspråk är fri att göra det.

Ett exempel på ett matlabprogram som utför en liknande beräkning finns att läsa i web-sidan

`http://www.math.chalmers.se~wennberg/flervariabelF1.html`