Kompletteringar till TMA976 ht 2008

Preliminär version

Peter Kumlin

1 december 2008

Contents

Nedanstående anteckningar täcker material som har tagits upp (eller borde ha tagits upp) på föreläsningarna i mån av tid men som inte finns med i kursböckerna. Detta material ingår inte i kursen i den mening att man förväntas kunna redovisa det på tentamen. Dock är det inte skadligt för någon student att ta del av det. Tala gärna om för mig om ni hittar något fel eller om ni har synpunkter på något ytterligare som skulle tagits med.

1 Pendels ekvation

Vi inleder med ett exempel från mekaniken på en modell för ett dynamiskt förlopp som ges av en ordinär differentialekvation. Låt en masspunkt med massan m vara fastsatt i ena ändan av en viktlös stång med längden l. Stångens andra ända har en fix position och masspunkten svänger i ett plan. Vi låter $\theta(t)$ beteckna utslagsvinkeln från lodlinjen vid tiden t. Om luftmotståndet försummas ger Newtons ekvation

$$m(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = (-mg\cos(\theta(t))\sin(\theta(t)), -mg + mg\cos^2(\theta(t))),$$

där $(x(t), y(t))$ anger koordinaterna för masspunktens position vid tiden t. Här antar vi att stångens fixerade punkt är origo och lodlinjen ges av den negativa y-axeln. Genom upprepad derivering av

$$\begin{cases} x(t) = l\sin(\theta(t)) \\ y(t) = -l\cos(\theta(t)) \end{cases}$$

och insättning i differentialekvationen fås

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) = 0.$$

Detta är en 2:a ordningens differentialekvation som ej är linjär. Notera att om man multiplicerar med $ml\dot{\theta}(t)$ och integrerar fås

$$\frac{1}{2}m(l\dot{\theta}(t))^2 + mg(l - l\cos(\theta(t)) = \text{konstant},$$

dvs att den totala energin är t-oberoende. Det är klart att denna formeln kan användas för att få fram ekvationen fär pendeln.

2 Existens/entydighetsresultat för ordinära differentialekvationer

I kapitel 8 i Persson/Böiers envariabelbok (PB1) ges exempel på differentialekvationer av olika ordning och på algoritmer för att hitta lösningar till dessa. Vi kan med bokens hjälp endast visa existens av en lösning till en differentialekvation genom att presentera en explicit lösning. Vidare sägs inget om entydighet för lösningar. Vi formulerar därför ett par satser som besvarar vissa av dessa frågor. Bevis utelämnas då de förutsätter kunskaper (vissa kompakthetsresultat) som vi inte har tillgängliga.

Vi inskränker oss till följande problem: Har differentialekvationen

$$(*) \quad \begin{cases} y' = f(x,y), \quad x \in I \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

där I är ett intervall som innehåller x_0, en lösning $y(x)$ för $x \in I$?

Denna fråga besvaras delvis av följande två satser där den första satsen även uttalar sig om entydigheten.

Sats 2.1 (Picard). *Låt $\Omega = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, $a, b > 0$, vara en omgivning av (x_0, y_0) där funktionen $f(x,y)$ uppfyller ett Lipschitz-villkor i y, dvs det finns ett reellt tal M sådant att*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq M|y_1 - y_2|, \quad \textit{alla} \ (x,y_1),(x,y_2) \in \Omega.$$

Då har differentialekvationen $(*)$ en entydigt bestämd kontinuerligt deriverbar lösning $y(x)$ i ett intervall
$[x_0 - c, x_0 + c] \subset [x_0 - a, x_0 + a]$. Om $\Omega = [x_0 - a, x_0 + a] \times \mathbb{R}$, $a > 0$, så gäller $c = a$.

Bevisiden bygger på att man studerar följden $y_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ av s.k. Picard-iterationer definierade av

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt \\ y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Vi noterar här att $y(x)$ är en lösning till $(*)$ om och endast om $y(x)$ satisfierar

$$(**) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt, \quad x \in I,$$

och om $y(x)$ satisfierar $(**)$ så är $y(x)$ en kontinuerligt deriverbar funktion. Visa allt detta. Det som återstår att leda i bevis är att följden $(y_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på I mot en funktion $y(x)$ så att man kan gå i gräns i

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt.$$

Se Eriksson/Larsson/Wadhe boken (ELW) sats 19.10.

Sats 2.2 (Peano). *Antag att $f(x, y)$ är kontinuerlig i en omgining $\Omega = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, $a, b > 0$, av (x_0, y_0). Då har differentialekvationen $(*)$ en kontinuerligt deriverbar lösning $y(x)$ i ett intervall $[x_0 - c, x_0 + c] \subset [x_0 - a, x_0 + a]$.*

Notera att Peanosatsen inte uttalar sig om entydigheten av lösningen. Ett exempel på en differentialekvation där Peanos men inte Picards existenssats är tillämplig är följande:

$$(+) \quad \begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}, & x \in I \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

där I är ett intervall som innehåller 0. Här är inte f Lipschitz-kontinuerlig i en omgivning av $(0, 0)$. Medelvärdessatsen ger ju att

$$|f(y) - f(0)| = |f'(\xi)||y - 0|,$$

där ξ ligger mellan y och 0, och f' är obegränsad i varje intervall $(0, \epsilon)$, $\epsilon > 0$. Det gäller att

$$y_a(x) = \begin{cases} (x - a)^3, & x > a \\ 0, & x \leq a \end{cases}$$

är lösningar till $(+)$ för varje $a \geq 0$. Vi har alltså oändligt många lösningar till $(+)$.

Vad gäller entydigheten av lösningar i Picardsaten är detta lätt att visa. Antag att $y_1(x), y_2(x)$ är två lösningar till $(*)$ i $[x_0, x_0 + \epsilon]$, $\epsilon > 0$. Då gäller

$$|y_1(x) - y_2(x)| = |\int_{x_0}^{x} (f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)))\, dt| \leq M \int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_2(t)|\, dt, \quad x \in [x_0, x_0 + \epsilon].$$

Sätt $\lambda(x) = \int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_2(t)|\, dt$. Notera att $\lambda(x_0) = 0$. Detta medför

$$\lambda'(x) \leq M\lambda(x), \quad x \in (x_0, x_0 + \epsilon),$$

och alltså $(e^{-Mx}\lambda(x))' \leq 0$ för $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$. Integration ger

$$0 \leq \lambda(x) \leq e^{M(x - x_0)}\lambda(x_0) = 0, \quad x \in [x_0, x_0 + \epsilon].$$

Alltså $\lambda(x) = 0$ för $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$. På liknande sätt visas påståendet för $x \leq x_0$.

För n:te ordningens differentialekvationer av typen

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), & x \in I \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)} = y_{n-1} \end{cases}$$

skrivs dessa om som system av 1:a ordningens differentialekvationer med

$$\begin{cases} u_1 = y \\ u_2 = y' \\ \ldots \\ u_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$

enligt

$$\begin{cases} u_1' = u_2, & u_1(x_0) = y_0 \\ u_2' = u_3, & u_2(x_0) = y_1 \\ \ldots & \ldots \\ u_{n-1}' = u_n, & u_{n-1}(x_0) = y_{n-2} \\ u_n' = f(x, u_1, u_2, \ldots, u_n), & u_n(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Metoden med Picarditerationer, en vektorvärd version, kan tillämpas här.

För vidare studium hänvisas till K.G.Andersson/L-C.Böiers: Ordinära differentialekvationer, Studentlitteratur.

3 Partiallösningar till linjära ode

I samband med diskussionen om hur olika ansatser för partiallösningar till linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter kan väljas gavs ett allmänt ”recept” som vi formulerar som en sats.

Sats 3.1. *Låt $K(x)$ vara en lösning till*

$$P(D)y \equiv y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots a_0 y = 0$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = \ldots y^{(n-2)} = 0$, $y^{(n-1)} = 1$. Då är

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} K(x-t)h(t)\,dt$$

en lösning till $P(D)y = h(x)$ som uppfyller begynnelsevillkoren $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$.

Beviset för denna sats bygger på upprepad användning av satsen om derivering under integraltecknet, se Persson/Böiers flervariabelbok (PB2) Sats 2 sid 186. Funktionen $K(x)$ kallas Greenkärna m.a.p. differentialoperatorn $P(D)$.

Ett exempel på en tillämpning av denna sats ges av

$$y'' - y = \frac{1}{e^x + 1},$$

där $K(x) = \sinh(x)$ (som vår vän Bernhard skulle sagt) och

$$y(x) = \int_0^x \sinh(x-t)\frac{1}{e^t + 1}\,dt = \ldots = \sinh x \cdot \ln\frac{e^x + 1}{2} + \frac{1}{2}(e^x - xe^x - 1).$$

4 Lite till om ode

Vi har noterat att för linjär differentialoperatorer $P(D)$ med konstanta koefficienter gäller

$$P(D)[y] = (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0)[y] = (D - r_1)^{m_1} \ldots (D - r_k)^{m_k}[y],$$

där $r_1, \ldots, r_k$ är rötterna till motsvarande karakteristiska ekvation med multipliciteterna $m_1, \ldots, m_k$. Motsvarande faktorisering låter sig inte allmänt göras i fallet med variabla koefficienter $a_{n-1}(x), \ldots, a_0(x)$. Dock låter det sig göras ibland vilket framgår av följande exempel.

Betrakta allmänt operatorn $P(D)[y] = (D^2 + a_1(x)D + a_0(x))[y]$. Då

$$((D-r_1(x))(D-r_2(x)))[y] = (D-r_1(x))[y'-r_2(x)y] = y''-(r_1(x)+r_2(x))y'+(r_1(x)r_2(x)-r_2'(x))y$$

gäller att

$$P(D)[y] = f(x) \Longleftrightarrow ((D - r_1(x))(D - r_2(x)))[y] = f(x)$$

om

$$a_1(x) = -r_1(x) - r_2(x), \quad a_0(x) = r_1(x)r_2(x) - r_2'(x).$$

Differentialekvationen löses då genom att lösa systemet av första ordningens linjära differentialekvationer

$$\begin{cases} (D - r_1(x))[z] = f(x), \\ (D - r_2(x))[y] = z(x) \end{cases}$$

Varför inte försöka lösa differentialekvationen $y'' - 2xy' + (x^2 - 1)y = x$ på detta sätt genom att hitta lämpliga $r_1(x)$ och $r_2(x)$.

Låt oss exemplifiera en annan metod att hantera homogena linjära differentialekvationer utgående från ett exempel.
Betrakta

$$y'' - y' \cos x + y \sin x = 0.$$

Givet att vi känner till en lösning $v(x)$ till differentialekvationen ovan ansätter vi

$$y(x) = v(x)w(x).$$

Om man deriverar $y(x)$ och sätter in i differentialekvationen reduceras denna till en linjär första ordningenens ekvation i w'. Konkret i fallet ovan, om man sättter $v(x) = e^{\sin x}$ så fås

$$w'' + w' \cos x = 0,$$

en ekvation som kan lösas med integrerande faktor. Metoden låter sig lätt generaliseras.

Mycken möda har genom historien lagts ner på att hitta explicita lösningar till diverse differentialekvationer. Teknologin har varit att man gör listiga variabelsubstitutioner och omskrivningar. Vi kan här bara peka på ett par sådana associerade med några kända män.

Variabelbyte i oberoende variabeln:

Eulers diff.-ekv.:

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 xy' + a_0 y = f(x), \quad x > 0$$

Sätt $t = \ln x$.

Variabelbyte i beroende variabeln:

Bernoullis diff.-ekv.:

$$y' + g(x)y + h(x)y^{\alpha} = 0, \quad \alpha \neq 0, 1.$$

Sätt $z(x) = y(x)^{1-\alpha}$

Böcker med långa listor av differentialekvationer med explicita lösningar finns att studera. Fördelen med en explicit lösning är att man lättare kan studer lösningens beroende på ingående parametrar.

5 Ordo-begreppen

I samband med Taylorutvecklingar har ordo-symbolen (stora ordo och lilla ordo) använts. Vi ger här en definition av begreppen. Låt $h(x)$ vara en funktion med definitionsmämngd D_f, där $D_f \bigcap [-c, c] \neq \emptyset$ för alla $c > 0$. n nedan betecknar ett icke-negativt heltal där "x^0" skrivs "1".

$h(x) = \mathcal{O}(x^n)$ då $x \to 0$ betyder att det finns ett intervall $I = [-a, a]$, $a > 0$ och ett reellt tal M så att

$$|h(x)| \leq M|x|^n, \text{ alla } x \in [-a, a] \bigcap D_f$$

$h(x) = o(x^n)$ då $x \to 0$ betyder att

$$\lim_{0 \neq x \to 0} \frac{h(x)}{|x|^n} = 0.$$

Speciellt följer att $h(x) = o(x^n)$ medför $h(x) = \mathcal{O}(x^n)$ men omvändningen gäller ej. Beteckningarna $\mathcal{O}((x-a)^n)$ och $o((x-a)^n)$ då $x \to a$ definieras analogt.

Påståendet att en funktion $g(x)$ är kontinuerlig i $x = a$ kan med ordosymbolen skrivas

$$g(x) = g(a) + o(1), \ x \to a.$$

6 l'Hospitals regel och Darboux sats

I samband med presentationen av l'Hospitals regel ELW Sats 16.8 antagande 2^0 formulerade jag det som att g' skulle ha konstant tecken på intervallen ifråga vid ett föreläsningstillfälle medan det vid ett senare föreläsningstillfälle sas att $g'(x) \neq 0$. Det är uppenbarligen klart att den första formulering är minst lika stark som den senare men de är faktiskt ekvivalenta vilket ges av Darboux sats.

Sats 6.1 (Darboux). *Antag att g är en deriverbar funktion på intervallet $[a, b]$. Då finns för varje γ mellan $g'(a)$ och $g'(b)$ ett tal $\xi \in (a, b)$ sådant att*

$$g'(\xi) = \gamma.$$

För att visa detta inser man först att om $g'(a)$ och $g'(b)$ har olika tecken så finns ett tal $\xi \in (a, b)$ sådant att $g'(\xi) = 0$ då man kan visa att g måste ha en lokal extrempunkt ξ mellan a och b. Det allmänna fallet fås sedan genom att betrakta funktionen $h(x) = g(x) - \gamma x$. Om g endast skulle vara definierad på intervallet $[a, b]$ så betecknar $g'(a)$ högerderivatan av g i a och $g'(b)$ vänsterderivatan av g i b. Notera att vi **inte** använt att g' skulle vara kontinuerlig.
Man kan här observera att det finns deriverbara funktioner som inte har kontinuerliga derivator, t.ex. $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$.

Ett exempel som visar att villkoret $g'(x) \neq 0$ inte kan försummas:

Sätt

$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{1}{2}\sin 2x \\ g(x) = e^{\sin x} f(x). \end{cases}$$

Vi noterar nu att

1. $g(x) \to +\infty,\ x \to +\infty$
2. $f'(x), g'(x)$ existerar
3. $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x}{e^{\sin x}(x+\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x)} \to 0,\ x \to +\infty$ (där en faktor $\cos x$ förkortats)

   MEN

4. $\frac{1}{e} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq e$ för all $x \geq 3$ (t ex), vilket innebär att $\frac{f(x)}{g(x)} \not\to 0,\ x \to +\infty$

l'Hopsitals regel är **inte** tillämpbar då $g'(x)$ växlar tecken i varje intervall (a, ∞), $a \in \mathbb{R}$.

Det är mycket sällan som l'Hospitals regel är "ett måste" för att visa existens av gränsvärden. Vi kompletterar ELW:s exempel på sidan 25 och uppgift 1644a med alternativa argument:

Ex 1: $\lim_{x\to\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) = 1$ inses från

$$x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) = x\int_x^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt = x([\frac{t}{1+t^2}]_x^\infty + \int_x^\infty \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\,dt) =$$

$$= -\frac{x^2}{1+x^2} + 2x\int_x^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt - 2x\int_x^\infty \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Detta ger

$$x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) = x\int_x^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{x^2}{1+x^2} + 2x\int_x^\infty \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt,$$

där $|2x\int_x^\infty \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt| \leq \frac{2x}{1+x^2}\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt \to 0$ då $0 \leq x \to \infty$. Låt $x \to \infty$ och påståendet följer.

1644a: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt = 1$ inses från

$$\frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt = \frac{\ln x}{x}([\frac{t}{\ln t}]_2^x + \int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,dt) = \frac{\ln x}{x}(\frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^{\sqrt{x}} \frac{1}{(\ln t)^2}\,dt + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,dt).$$

Vidare gäller

$$0 \leq \frac{\ln x}{x}\int_2^{\sqrt{x}} \frac{1}{(\ln t)^2}\,dt \leq \frac{\ln x}{x}\sqrt{x}\frac{1}{(\ln 2)^2} \to 0$$

då $2 \leq x \to \infty$ och

$$0 \leq \frac{\ln x}{x}\int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,dt \leq \frac{\ln x}{x}x\frac{1}{(\ln\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}\ln x} \to 0$$

då $2 \leq x \to \infty$. Påståendet följer.

7 En mycket snäll funktion

I samband med MacLaurinutvecklingar har vi studerat funktionen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Denna funktion är oändligt många gånger deriverbar överallt, betecknat $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, och $f^{(n)}(0) = 0$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$ Visa detta! Speciellt innebär det att f har en MacLaurinserie $\Sigma_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ som konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$, eftersom $\Sigma_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$, samtidigt som $f(x) > 0$ för $x > 0$. Detta innebär att $f(x) = \Sigma_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ för alla $x \in [-\epsilon, \epsilon]$ endast för $\epsilon = 0$. Funktioner med egenskapen att det för alla $x \in \mathbb{R}$ finns ett $\epsilon = \epsilon(x) > 0$ så att

$$f(x) = \Sigma_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \ x \in [-\epsilon, \epsilon]$$

kallas real-analytiska. Exemplet ovan visar att det finns funktioner i $C^\infty(\mathbb{R})$ som inte är real-analytiska.

8 Karakterisering av kompakta mängder i $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Nedan ges en ekvivalent beskrivning av kompakthet för mängder M i $\mathbb{R}^n$ i termer av egenskaper av följder av element i M. Vi studerar först fallet med $n = 1$. Följande resultat är användbart.

Sats 8.1. *Låt $(a_n)_{n=1}^\infty$ vara en godtycklig talföljd av reella tal. Då finns en delföljd $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ av $(a_n)_{n=1}^\infty$ som är monoton.*

Bevis: En monoton talföljd är en följd som är antingen avtagande eller växande. Låt oss först införa begreppet vändpunkt nedåt. Vi säger att a_{n_0} är en vändpunkt nedåt för följden $(a_n)_{n=1}^\infty$ om $a_m \le a_{n_0}$ för alla $m > n_0$. Två fall kan förekomma.
Fall 1: Det finns oändligt många vändpunkter nedåt. Beteckna dessa med

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$$

där $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Följden $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ är avtagande då

$$a_{n_1} \ge a_{n_2} \ge \ldots \ge a_{n_k} \ge \ldots.$$

Fall 2: Det finns inga eller högst ändligt många vändpunkter nedåt. Välj ett element a_{m_1} sådant att det inte finns några vändpunkter a_n nedåt med $n \ge m_1$. Välj sedan ett element a_{m_2} med $m_2 > m_1$ och $a_{m_2} \ge a_{m_1}$. Ett sådant element måste existera då det inte finns vändpunkter nedåt med index större än eller lika med m_1. Fortsätt iduktivt att välja element så att $a_{m_{k+1}} \ge a_{m_k}$. Detta ger en följd $(a_{m_k})_{k=1}^\infty$ där

$$a_{m_1} \le a_{m_2} \le \ldots \le a_{m_k} \le \ldots.$$

Följden är alltså växande och påståendet i satsen är visat.

Vi kan nu visa följande resultat baserat på supremumaxiomet. Beviset är rättframt och utelämnas här.

Sats 8.2. *Låt $(a_n)_{n=1}^\infty$ vara en godtycklig växande talföljd. Då gäller:*
$(a_n)_{n=1}^\infty$ är uppåt begränsad om och endast om $(a_n)_{n=1}^\infty$ är konvergent.

På samma sätt visas också

Sats 8.3. *Låt $(a_n)_{n=1}^\infty$ vara en godtycklig avtagande talföljd. Då gäller:*
$(a_n)_{n=1}^\infty$ är nedåt begränsad om och endast om $(a_n)_{n=1}^\infty$ är konvergent.

Vi kan nu formulera och bevisa

Sats 8.4 (Karakterisering av kompakta delmängder av $\mathbb{R}$). *Låt K vara en delmängd av $\mathbb{R}$. Då är K kompakt om och endast om för varje följd $(a_n)_{n=1}^\infty$ sådan att $a_n \in K$ för alla n det finns en delföljd $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ och ett tal $a \in K$ så att $a_{n_k} \to a$ då $k \to \infty$.*

Bevis: Antag först att K är en kompakt, dvs sluten och begränsad, delmängd av $\mathbb{R}$ och låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en följd sådan att $a_n \in K$ för alla n. Då finns en monoton delföljd $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ av $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ enligt Sats 6.1. Då K är en begränsad mängd är $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ en begränsad följd. Enligt Sats 6.2 och Sats 6.3 måste $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ vara konvergent. Låt a beckna gränsvärdet av följden. Då varje $a_{n_k} \in K$, $k = 1, 2, \ldots$, måste $a \in K \bigcup \partial K$. Men K är sluten så $\partial K \subset K$ och alltså gäller $a \in K$.

Vi antar nu att för varje följd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sådan att $a_n \in K$ för alla n finns en delföljd $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ och ett tal $a \in K$ så att $a_{n_k} \to a$ då $k \to \infty$. Vi ska visa att K då måste vara sluten och begränsad.
K är begränsad: Antag att K inte är begränsad och visa att detta motsäger vårt antagande ovan. Eftersom K är obegränsad finns för varje reellt tal M ett element $a \in K$ sådant att $|a| \geq M$. Välj ett godtyckligt element i K och kalla det a_1. Välj $a_2 \in K$ så att $|a_2| \geq |a_1| + 1$. Välj induktivt a_{n+1} så att $|a_{n+1}| \geq |a_n| + 1$ för $n = 1, 2, \ldots$ Följden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kan inte ha en konvergent delföljd ty om den hade det skulle denna delföljd vara begränsad samtidigt som det gäller att $|a_n| \to \infty$ då $n \to \infty$. Motsägelse och alltså är K begränsad.
K är sluten: Antag att K inte är sluten och visa att detta motsäger vårt antagande ovan. Om K inte är sluten finns en randpunkt a till K som inte tillhör K. Välj för varje positivt heltal n ett element i $K \bigcap B(a, \frac{1}{n})$. Kalla detta a_n. Notera att $K \bigcap B(a, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$ för alla n eftersom a är en randpunkt till K. Följden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ligger i K och konvergerar mot gränsvärdet a eftersom $|a_n - a| \leq \frac{1}{n}$ för alla n. Detta ger en motsägelse. Alltså måste K vara sluten. Beviset av satsen är nu klart.

Sats 6.4 kan nu generaliseras till godtyckligt $\mathbb{R}^n$. Vi har

Sats 8.5 (Karakterisering av kompakta delmängder av $\mathbb{R}^n$). *Låt K vara en delmängd av $\mathbb{R}^n$. Då är K kompakt om och endast om för varje följd $(\mathbb{a}_k)_{k=1}^{\infty}$ sådan att $\mathbb{a}_k \in K$ för alla k finns en delföljd $(\mathbb{a}_{k_l})_{l=1}^{\infty}$ och ett tal $\mathbb{a} \in K$ så att $\mathbb{a}_{k_l} \to \mathbb{a}$ då $l \to \infty$.*

Beviside: Andra delen av beviset av Sats 6.4 går igenom i fallet $\mathbb{R}^n$ med $n > 1$ varför vi endast behandlar första delen av beviset. Låt alltså K vara en sluten och begränsad delmängd i $\mathbb{R}^n$ och låt $(\mathbb{a}_k)_{k=1}^{\infty}$ vara en godtycklig följd i K. Vi har

$$\mathbb{a}_k = (a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Eftersom K är en begränsad mängd gäller att det finns ett reellt tal M sådant att $|\mathbb{a}_k| \leq M$ för $k = 1, 2, \ldots$. Då gäller

$$|a_{k,1}| \leq |\mathbb{a}_k| \leq M, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Eftersom följden $(a_{k,1})_{k=1}^{\infty}$ är begränsad finns enligt Sats 6.1, Sats 6.2 och Sats 6.3 en konvergent delföljd, beteckna den $(a_{k,1}^{(1)})_{k=1}^{\infty}$, av $(a_{k,1})_{k=1}^{\infty}$. Betrakta nu delföljden $(\mathbb{a}_k^{(1)})_{k=1}^{\infty}$ av $(\mathbb{a}_k)_{k=1}^{\infty}$. Vi har

$$\mathbb{a}_k^{(1)} = (a_{k,1}^{(1)}, a_{k,2}^{(1)}, \ldots, a_{k,n}^{(1)}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$|a_{k,2}^{(1)}| \leq |\mathbb{a}_k^{(1)}| \leq M, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

där det enligt satserna ovan gäller att följden $(a_{k,2}^{(1)})_{k=1}^{\infty}$ har en konvergent delföljd som vi betecknar $(a_{k,2}^{(2)})_{k=1}^{\infty}$. Fortsätt induktivt att betrakta följden på koordinatplats $l+1$ för följden $(\mathbb{a}_k^{(l)})_{k=1}^{\infty}$, där

$$\mathbb{a}_k^{(l)} = (a_{k,1}^{(l)}, a_{k,2}^{(l)}, \ldots, a_{k,n}^{(l)}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

och välj ut en delföljd för vilken de reella talen på plats $l+1$ konvergerar. Efter ett ändligt antal utgallringar (tagande av delföljder av delföljder) har vi fått en delföljd $(\mathbb{a}_k^{(n)})_{k=1}^{\infty}$ av $(\mathbb{a}_k)_{k=1}^{\infty}$ för vilka de reella talen på samtliga koordinatplatser konvergerar. Det som återstår är att visa att $(a_k^{(n)})_{k=1}^{\infty}$ konvergerar mot ett elenent i K.

Läsaren uppmanas att använda karakteriseringen av kompakthet ovan för att visa Satserna 4 och 5 på sidan 41 i PB2 samt även följande resultat.

Sats 8.6. *Låt $\mathbb{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^p$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, vara en kontinuerlig funktion, där $\mathbb{D}$ är en kompakt mängd. Då är*

$$\mathbb{f}(\mathbb{D}) = \{\mathbb{f}(\mathbb{x}) : \mathbb{x} \in \mathbb{D}\}$$

en kompakt mängd i $\mathbb{R}^p$.

9 Differensekvationer

Vi observerar att linjära differensekvationer med konstanta koefficienter kan skrivas om som matrisekvationer enligt följande: För

$$(*) \quad y_{n+p} + a_{p-1}y_{n+p-1} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = d_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

sätter vi

$$Y_n = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+p-1} \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

och

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{p-1} \end{bmatrix}.$$

A är en $p \times p$–matris. Vi kan då skriva $(*)$ som

$$Y_{n+1} = AY_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

vilket ger

$$Y_n = A^n Y_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Den karakteristiska ekvationen till $(*)$, dvs

$$(+) \quad r^p + a_{p-1}r^{p-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$$

är lika med sekularekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$, där I betcknar enhetsmatrisen av typ $p \times p$, dvs

$$(++) \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{p-1} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

med $r = \lambda$. Sekularekvatinens rötter är egenvärdena till matrisen A. Spektralsatsen för matriser ger att A^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, lätt kan beräknas för diagonaliserbara matriser A vilket kommer tas diskuteras i den kommande kursen i linjär algebra. Läsaren uppmanas att redsn nu och med hjälp av räknereglerna för determinanter att visa att ekvationerna i (+) och (++) är desamma.

Vi tillämpar matrisformuleringen på exempel 19 sidan 46 i ELW. Fibonaccis talföljd $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ definieras av

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

och dyker upp vid beskrivning av ett flertal fenomen i naturen. Om vi sätter

$$Y_n = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

och

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

kan differensekvationen skrivas

$$Y_n = A^n Y_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Egenvärdena till A (och då även rötterna till den karakteristiska ekvationen för $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$) är lika med

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

10 Fixpunktssatsen och Newtons metod

11 Lite till om numeriska serier

Vi noterade på föreläsning att rot-/kvotkriterierna inte förmådde avgöra om och när den positiva serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$, där $a_k = \frac{1}{k^p}$ med parameter $p \in \mathbb{R}$, konvergerade. Dessa kriterier bygger på jämförelse med geometriska serier och när $\sqrt[k]{a_k} \to 1/\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$ då $k \to \infty$ kan inget sägas om seriens konvergens. Vet man lite mer, t ex hur snabbt $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ går mot 1 då $k \to \infty$ kan man säga lite mer. Detta är innehållet i Raabes konvergenskriterium som vi nu formulerar som en sats.

Sats 11.1 (Raabes konvergenskriterium). *Låt $a_k > 0$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$ och antag att*

$$k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) \to L, \quad k \to \infty.$$

Då gäller att

1. *$L > 1$ medför att $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar*
2. *$L < 1$ medför att $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar*
3. *$L = 1$ medför att ingen slutsats kan dras.*

Läsaren uppmanas att tillämpa Raabes kriterium på serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ där $p \in \mathbb{R}$. Vi får ”rätt resultat i fallen $p \neq 1$” men för $p = 1$ kan ingen slutsats dras.

Vi skisserar nu beviset för Raabes kriterium.
Fall1: Antag $L > 1$. Då finns ett heltal N och ett $\epsilon > 0$ så att

$$k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) > 1 + \epsilon, \quad k \geq N,$$

dvs det gäller att

$$k a_k - (k+1) a_{k+1} > \epsilon a_{k+1}, \quad k = N, N+1, N+2, \ldots$$

Summera nu dessa olikheter för $k = N, N+1, \ldots, m$. Vi får

$$N a_N - (m+1) a_{m+1} > \epsilon \Sigma_{k=N+1}^{m+1} a_k.$$

Detta ger

$$\Sigma_{k=N+1}^{m+1} a_k < \frac{1}{\epsilon} N a_N, \quad m \geq N,$$

och enligt huvudsatsen för positiva serier konvergerar $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ eftersom dess partialsummor är uppåt begränsade.
Fall2: Antag $L < 1$. Då finns ett heltal N och ett $\epsilon > 0$ så att

$$k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) < 1 - \epsilon, \quad k \geq N,$$

dvs det gäller att

$$ka_k < (k+1)a_{k+1} - \epsilon a_{k+1}, \quad k = N, N+1, N+2, \ldots.$$

Följdaktligen gäller att $ka_k < (k+1)a_{k+1}$ och alltså

$$\frac{C}{k} < a_k \quad k = N, N+1, N+2, \ldots$$

för något positivt reellt tal C. Då serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergerar divergerar $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ enligt jämförelsekriteriet för positiva serier.

Slutligen levererar vi bevis för satserna 18.15 och 18.16 i ELW. $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ är en **omordning** av serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ om σ är en permutation av $(1, 2, 3, \ldots)$, dvs σ är en bijektion på mängden $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Detta innebär att

- $\sigma(k) = \sigma(l)$ medför $k = l$, och
- för alla positiva heltal k finns positivt heltal l så att

$$\sigma(l) = k.$$

Vi visar nu att varje omordning $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ av en absolutkonvergent serie $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent och har samma summa som $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$.
Antag alltså att $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent, dvs $\Sigma_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är en konvergent positiv serie. Då är $\Sigma_{k=1}^{\infty} |a_{\sigma(k)}|$ en konvergent positiv serie eftersom en övre begränsning A till partialsummorna $\Sigma_{k=1}^{n} |a_k|$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ också är en övre begränsning till partialsummorna $\Sigma_{k=1}^{n} |a_{\sigma(k)}|$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Detta följer av att för varje n gäller

$$\Sigma_{k=1}^{n} |a_{\sigma(k)}| \leq \Sigma_{k=1}^{\max\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}} |a_k| \leq A.$$

Alltså är $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ en absolutkonvergent serie. Antag nu att S är summan av serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$. Det återstår att visa att också $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ har summan S. Fixera $\epsilon > 0$ och välj ett positivt heltal N så att

$$\Sigma_{k=N}^{\infty} |a_k| < \epsilon.$$

Detta är möjligt då $\Sigma_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergerar. Sätt

$$\tilde{N} = \min\{n : \{1, 2, \ldots, N\} \subset \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}\}.$$

Vi har

$$|\Sigma_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} - S| \leq \Sigma_{k=N}^{\infty} |a_k| < \epsilon, \quad n \geq \tilde{N}.$$

Alltså gäller

$$\lim_{n \to \infty} \Sigma_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} = S.$$

Vi visar nu följande påstående: För varje betingat konvergent serie $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ och varje reellt tal S finns en omordning $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ (finns inte bara en utan oändligt många) som är konvergent och har summan S. Sätt $a_k^+ = \max\{a_k, 0\}$ och $a_k^- = \max\{-a_k, 0\}$. Då är $a_k = a_k^+ - a_k^-$ och

$|a_k| = a_k^+ + a_k^-$. Eftersom $\Sigma_{k=1}^\infty a_k$ är betingat konvergent, och alltså $\Sigma_{k=1}^\infty a_k$ är konvergent medan $\Sigma_{k=1}^\infty |a_k|$ är divergent, divergerar de båda serierna

$$\begin{cases} \Sigma_{k=1}^\infty a_k^+ \\ \Sigma_{k=1}^\infty a_k^- \end{cases}.$$

Detta gäller p g a att

$$|a_k| = 2a_k^- + a_k = 2a_k^+ - a_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Låt nu $(c_k)_{k=1}^\infty$ vara den delföljd av $(a_k)_{k=1}^\infty$ som består av alla $a_k \geq 0$ och $(d_k)_{k=1}^\infty$ vara den delföljd av $(a_k)_{k=1}^\infty$ som består av alla $a_k < 0$. Skapa nu följden $(a_{\sigma(k)})_{k=1}^\infty$ som

$$c_1, \ldots, c_{n_1}, d_1, \ldots, d_{n_2}, c_{n_1+1}, \ldots, c_{n_3}, d_{n_2+1}, \ldots, d_{n_4}, c_{n_3+1}, \ldots, c_{n_5}, d_{n_4+1}, \ldots$$

där

$$n_1 = \min\{n : c_1 + c_2 + \ldots + c_n > S\}$$

$$n_2 = \min\{n : c_1 + \ldots + c_{n_1} + d_1 + d_2 + \ldots + d_n < S\}$$

och induktivt

$$n_{2k+1} = \min\{n > n_{2k-1} : c_1 + \ldots + c_{n_1} + d_1 + \ldots + d_{n_2} + \ldots + d_{n_{2k-2}+1} + \ldots + d_{n_{2k}} + c_{n_{2k-1}+1} + \ldots + c_n > S\}$$

och

$$n_{2k+2} = \min\{n > n_{2k} : c_1 + \ldots + c_{n_1} + d_1 + \ldots + d_{n_2} + \ldots + c_{n_{2k-1}+1} + \ldots + c_{n_{2k+1} + d_{n_{2k}+1} + \ldots + d_n} < S\}$$

för $k = 1, 2, 3, \ldots$. Det följer att

$$\lim_{k\to\infty} \Sigma_{k=1}^\infty a_{\sigma(k)} = S$$

eftersom $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, då $\Sigma_{k=1}^\infty a_k$ är konvergent, och alltså

$$\lim_{k\to\infty} c_{n_{2k-1}+1} + \ldots + c_{n_{2k+1}} = \lim_{k\to\infty} d_{n_{2k}+1} + \ldots + d_{n_{2k+2}} = 0.$$

Man visar också enkelt att varje betingat konvergent serie har divergenta omordningar.