Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del A** den 13/12 2003, kl. 14.15–18.15.

Hjälpmedel: Formelblad på baksidan, ej räknedosa.
Telefon: Axel Målqvist, tel. 0740-459022.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.
Uppgift 4 skall ej räknas av studenter i F1 eller studenter som har gjort MATLAB-tentan 2003-12-06.

---

1. Lös differensekvationen
$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = n^2. \qquad (7p)$$

2. Undersök om följande gränsvärden existerar. Beräkna dem i så fall.
$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - \sin^2 x}{1-\cos(x^2)}, \qquad \text{b)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{xy^2 + x^3}. \qquad (4p per del)$$

3. Lös differentialekvationen
$$y''' + y'' + 4y' + 4y = x + \cos^2 x. \qquad (8p)$$

4. (Denna uppgift räknas endast av studenter i högre årskurs som inte har gjort MATLAB-tentan 2003-12-06.)

   Visa att funktionen $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(k+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2}$ är en lösning till differentialekvationen $x^2y'' + xy' + (x^2-4)y = 0$. För vilka x gäller lösningen? (8p)

5. För vilka reella x konvergerar serien
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n\ ? \qquad (7p)$$

6. Studera funktionen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x+n)^2 e^{-(x+n)}$.
   a) Visa att serien konvergerar likformigt på $[0,1]$.
   b) Beräkna $\int_0^1 f(x)\,dx$. (7p)

7. Formulera och bevisa satsen om Maclaurinutvecklingens entydighet. (7p)

8. Formulera och bevisa jämförelsekriteriet för positiva serier. (8p)

KH

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{1+\theta x}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta x$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{1+(\theta x)^2}$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\ , \quad \text{där} \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$