Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del A** den 17/4 2004, kl. 8.45–12.45.

Hjälpmedel: Formelblad på baksidan, ej räknedosa.
Telefon: Erik Broman, tel. 0739-77 92 68.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Lös differentialekvationerna
   a) $(x+1)y' + 2y = x^2, \quad y(0) = 1,$ b) $(x+1)y' = y^2, \quad y(0) = 1.$ (8p)

2. Undersök för var och en av följande serier om den är absolutkonvergent, betingat konvergent eller divergent.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2n^2-1},$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1+\frac{1}{n}),$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(1+n^2)}.$ (8p)

3. Lös differentialekvationen
   $$y'' + 2y' - 3y = (x+1)e^x.$$ (7p)

4. Bestäm konstanten a så att följande gränsvärde existerar,
   $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a\ln(1+2x)}{x\tan x} \right).$$
   Beräkna sedan gränsvärdet. (7p)

5. Definiera rekursivt en talföljd x_n genom
   $$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \sqrt{x_n + 1}.$$
   Undersök om x_n konvergerar då $n \to \infty$. Beräkna i så fall gränsvärdet. (8p)

6. Finn lösningar till $2xy'' - y = 0$ i form av en potensserie $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Vad är potensseriens konvergensradie? (7p)

7. Betrakta differensekvationen $y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = d_n$. Låt $y_n^{(p)}$ vara en partikulärlösning till denna ekvation och låt $y_n^{(h)}$ vara allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation (med $d_n = 0$). Visa att $y_n = y_n^{(p)} + y_n^{(h)}$ är allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen. (8p)

8. Antag att potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerar i punkten $x_0 \neq 0$. Visa att serien då är absolutkonvergent för alla x sådana att $|x| < |x_0|$. (7p)

KH

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} \right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{1+\theta x}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta x$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{1+(\theta x)^2}$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\ , \ \text{där} \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$