Matematiska institutionen CTH/GU

Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del A** den 20/8 2004, kl. 8.45–12.45.

Hjälpmedel: Formelblad på baksidan, ej räknedosa.
Telefon: Erik Broman, tel. 073-977 92 68.
Obs! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

---

1. Lös differensekvationen $y_{n+2} + 2y_{n+1} + 4y_n = n^2 + 1$. (8p)

2. Lös differentialekvationen $(x^2 + 1)y' + x(y^2 + 2y) = 0$. (7p)

3. Konvergerar eller divergerar

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[\ln(n^2+2) - \ln(n^2+1)]\sqrt{n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{2n}}{(3n)!}$? (8p)

4. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^{x^2} - e^{-x^2})\sqrt{1+x^2} - x^2(e^x + e^{-x})}{2\ln(1+x^4) - \ln(1+2x^4)}\right).$$ (8p)

5. Beräkna summan

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{-2n}}{(2n+1)(2n+2)}.$$ (7p)

6. Undersök funktionsföljden $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}e^{\frac{nx}{n+x}}$ m.a.p. punktvis resp. likformig konvergens då $n \to \infty$ för $x \in [0, 1]$. Beräkna $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$. (7p)

7. Formulera och bevisa Maclaurins formel med Lagranges restterm. (7p)

8. Formulera och bevisa lösningsformeln för en linjär homogen differentialekvation av ordning två. (8p)

KH

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} \right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a>0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|\ , \quad a>0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln \left| x+\sqrt{x^2+a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{1}{1+\theta x}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos \theta x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \cdot \frac{1}{1+(\theta x)^2}$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1+\epsilon_n)\ , \ \text{där} \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$