Matematik, Chalmers/GU
Tentamen i **TMA975 Reell matematisk analys F, del A**
Tid: 11/12 2004, kl 14.00 – 18.00
Hjälpmedel: Formelblad bifogas tesen, ej räknedosa
Telefonvakt: Leonid Gershuni 073- 977 9268

---

1. Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = n^2 \\ y_0 = 1,\ y_1 = 2 \end{cases}$$

(7p)

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \cos^2 x \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

(7p)

3. Avgör om gränsvärdena existerar och i så fall beräkna dem

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3 \cos x}$,

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2-y}$.

(4p+4p)

4. (Denna uppgift ska **endast** räknas av studenter i högre årskurs som inte gjort MATLAB-tentan 2004-12-04.) Bestäm en icke-trivial lösning ($y(x) \not\equiv 0$) till $x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$ på formen $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ samt beräkna konvergensradien för denna.

(8p)

5. Konvergerar eller divergerar

   (a) $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{\tan \frac{1}{n}}{\ln(n+1)}$,

   (b) $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$?

(4p+4p)

6. Låt f vara en kontinuerlig reell funktion som uppfyller

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

där C är en positiv konstant. Definiera[1] F på $\mathbb{R}$ som

$$F(x) = \Sigma_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n).$$

Visa att

(a) F är kontinuerlig och periodisk med perioden 1, dvs. $F(x+1) = F(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

(b) för varje kontinuerlig periodisk funktion $G(x)$ med perioden 1 gäller

$$\int_0^1 F(x)G(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)\,dx.$$

(7p)

7. Formulera och bevisa Leibniz' konvergenskriterium för alternerande serier.

(8p)

8. Definiera begreppet likformig konvergens på en mängd M för en funktionsföljd, samt formulera och bevisa satsen om gränsövergång under integraltecknet för en likformigt konvergent funktionsföljd.

(7p)

[1] $F(x) = \lim_{N\to\infty} \Sigma_{n=-N}^{N} f(x+n)$