Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Marcus Warfheimer, 0762-721860
2005–12–13 kl. 14.00–18.00

Tentamen i TMA976 Matematisk analys, fortsättning F

Betygsgränser: 3=24p, 4=36p, 5=48p bonuspoäng (maximalt 4p) medräknade. Lärares närvaro i tentamenssalen: ca 9.30 och 11.30.

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y''' - 5y'' + 8y' - 4y = xe^x + x^2 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

(8p)

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} \frac{1}{3}y' = x^5y^2 - x^2y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(7p)

3. Lös differensekvationen

$$\begin{cases} a_{n+2} - \frac{\sqrt{3}}{2}a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

samt ange a_{2005}. (6p)

4. a) Bestäm det polynom $P(x)$ av lägsta möjliga grad för vilket

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + P(x))}{2 - 2\cos x - \sin^2 x} = 1.$$

(5p)

b) Avgör om gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{|x-y|}{x^2-2xy+y^2}}$$

existerar och beräkna i så fall det. (4p)

5. Avgör för vilka reella tal x som serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}})} x^n$$

konvergerar. (6p)

6. Givet en funktionsföljd $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ på intervallet $I = [0, 1]$. Antag att

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x_k) = \frac{1}{2}$$

för varje konvergent följd $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ av punkter i I. Sätt $f(x) = \frac{1}{2}$ för $x \in I$.

a) Visa att $f_k \to f$ punktvis på I då $k \to \infty$. (2p)

b) Avgör om $f_k \to f$ likformigt på I då $k \to \infty$. (6p)

v.g.v.

7. Formulera och bevisa MacLaurins formel. Satser som används i beviset behöver endast formuleras. (8p)

8. Låt $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ vara en positiv serie, där följden $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ är avtagande. Visa att $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar om och endast om serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergerar. Använd detta kriterium för att avgöra för vilka $p \in \mathbb{R}$ som serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ är konvergent (även om du inte visat det). (6+2p)

PK