MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättning F, TMA976, 21/12 2007, 14.00-18.00
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: David Heintz, 0762-721860.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS:	Ange linje samt personnummer och namn på omslaget. Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad. Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = xe^{2x} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

2. (a) Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t}\, dt.$$

(4p)

(b) Bestäm de reella talen a och b så att

$$\lim_{x\to 0} \frac{a(\ln(1+x))^3}{(b-\cos x)\sin x} = 1.$$

(4p)

3. Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar

(a)

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} e^{-(\ln n)^2}$$

(3p)

(b)

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \arctan(\frac{1}{n}) \tan(\frac{1}{n})$$

(4p)

4. Visa att

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$$

konvergerar likformigt på $[1, \infty[$ samt beräkna seriens summa.

(7p)

5. För $x \in \mathbb{R}$ sätt $y_1(x) = x$ och

$$y_n(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

där n är lika med antalet rader i determinanten. Bestäm $y_n(x)$ för godtyckligt positivt heltal n för $|x| > 2\sqrt{2}$.

(7p)

6. Beräkna konvergensradien för potensserien

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} F(n) x^n,$$

där talföljden $F(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ bestäms av

$$\begin{cases} F(n+2) - F(n+1) - F(n) = 0, \; n = 0, 1, 2, \dots \\ F(0) = F(1) = 1. \end{cases}$$

Även delresultat kan ge poäng.

(8p)

7. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats.

(8p)

8. Låt a, b och h vara kontinuerliga funktioner och antag att $z(x) > 0$ är en lösning till

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0.$$

Visa att

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x)$$

kan lösas genom att ansätta lösningen på formen $z(x)u(x)$ och lösa ekvationen för $u(x)$.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK