MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättning F, TMA976, 22/8 2008, 8.30-12.30
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Adam W, 0762-721860.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differensekvationen

$$\begin{cases} y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = n \cdot 2^n, \; n = 0, 1, 2, \dots \\ y_0 = 0, \; y_1 = 1. \end{cases}$$

(7p)

2. (a) För vilka $a > 0$ existerar gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}.$$

Beräkna det då det existerar.

(4p)

(b) Avgör om gränsvärdet

$$\lim_{|(x,y)| \to \infty} \frac{1}{1 + (x - \cosh y)^2}$$

existerar.

(4p)

3. För vilka reella x konvergerar serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{3n}.$$

(7p)

4. Bestäm alla reella kontinuerliga lösningar y till

$$y(x) - \int_0^x e^{y(t)-t} \, dt = 2$$

samt ange deras definitionsmängd.

(7p)

5. Visa att funktionsserien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$$

konvergerar punktvis på $\mathbb{R}$. Avgör[1] om funktionsserien konvergerar likformigt på $\mathbb{R}$.

(7p)

6. Funktionen $y = f(x)$ satisfierar

$$y'' - 2y' + y = 2e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Avgör om något av påståendena nedan är sant.

A: $f(x) > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ medför $f'(x) > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$,

B: $f'(x) > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ medför $f(x) > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

(8p)

7. Bevisa satsen om entydighet av Maclaurinutvecklingar.

(8p)

8. Definiear begreppet "likformig konvergens av en funktionsserie $\Sigma_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ på mängden $M \subset \mathbb{R}$". Antag att $\Sigma_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konvergerar punktvis på mängden $M \subset \mathbb{R}$. Visa att $\Sigma_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konvergerar likformigt på mängden $M \subset \mathbb{R}$ om och endast om

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N \geq 1 \, \forall n > m \geq N \, \forall x \in M : |\Sigma_{k=m}^{n} u_k(x)| < \epsilon.$$

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

[1] Se problem 8. Du får använda resultatet där även om du inte bevisat påståendet i problem 8