MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättning F, TMA976, 19/12 2008, 14.00-18.00
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: David Heintz, 0762-721860.

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' + y' - 6y = e^{-3x}\cos x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

(8p)

2. (a) Avgör om

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x \cdot \sin y}{(x+y)^2 + (x-y)^2}$$

existerar, och i så fall beräkna det.

(4p)

(b) Bestäm det reella tal a sådant att

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{\sqrt[x]{x} - a}{\ln x} = 1.$$

(4p)

3. (a) Avgör om serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2k+1}{k(k+1)}$$

konvergerar. Beräkna serien summa om serien konvergerar.

(4p)

(b) Beräkna konvergensradien för potensserien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}\right)^2 x^k.$$

(3p)

4. Låt a vara ett positivt reellt tal. Visa att

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} x^{a+2} e^{-kx^2}$$

konvergerar likformigt på $[0, \infty)$.

(7p)

5. Avgör om följden $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, där

$$c_n = \ln(1 + \frac{1}{n^2}) + \ln(1 + \frac{2}{n^2}) + \ln(1 + \frac{3}{n^2}) + \ldots + \ln(1 + \frac{n}{n^2}),$$

konvergerar, och i så fall beräkna gränsvärdet.

(7p)

6. Antag att den positiva serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar samt att potensserien $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ har konvergensradien 1. Sätt

$$s_n = \Sigma_{k=1}^{n} a_k (1 - \frac{1}{n})^k, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Visa att $s_n \to \infty$ då $n \to \infty$.

(6p)

7. Betrakta differensekvationen

$$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

där $a, b \in \mathbb{R}$ uppfyller $a^2 > 4b$. Visa att differensekvationen har en entydigt bestämd lösning för varje val av begynnelsevillkor y_0, y_1.

(8p)

8. Antag att

   (a) $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ samt att

   (b) f är Lipschitzkontinuerlig med Lipschitskonstanten $k < 1$, dvs

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \text{alla } x, y \in [-1, 1].$$

   Visa att

   (a) det finns ett entydigt bestämt $\alpha \in [-1, 1]$ sådant att

$$f(\alpha) = \alpha,$$

   (b) för varje $x_0 \in [-1, 1]$ gäller att följden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, där $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ konvergerar mot fixpunkten α för f, samt att

(c)

$$\begin{cases} |x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k}\,|x_1 - x_0| \\ \\ |x_n - \alpha| \leq \frac{k}{1-k}\,|x_n - x_{n-1}| \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(9p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK