MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättning F, TMA976, 18/4 2009, 8.30-12.30
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Magnus Goffeng, 0762-721860.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = x\cos x \cosh x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

(8p)

2. (a) Avgör om

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - x^2 y}{x^2 + 4y^2 + 4xy}$$

existerar, och i så fall beräkna det.

(4p)

(b) Beräkna

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

(4p)

3. Beräkna konvergensintervallet för potensserien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2} x^k.$$

(7p)

4. För $p > 0$ sätt

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^p}, \ x \in [0, 1].$$

   (a) För vilka $p > 0$ konvergerar f_n likformigt mot den punktvisa gränsfunktionen f på $[0, 1]$?

   (b) Avgör om $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx$ då $n \to \infty$ för $p = 2$ och $p = 4$.

(7p)

5. Låt $a > 0$. Avgör om följden $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, där

$$\begin{cases} c_1 > 0 \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + \frac{a}{c_n}), \ n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

konvergerar, och i så fall beräkna gränsvärdet.

(7p)

6. Avgör om serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{k}$$

konvergerar. Här betecknar $\lfloor s \rfloor$ det största heltal $\leq s$ där $s \in \mathbb{R}$.

(7p)

7. Formulera och bevisa Maclaurins formel.

(8p)

8. Låt $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, vara en följd av reellvärda funktioner definierade på intervallet $[0, 1]$. Antag att $0 \leq g_{n+1} \leq g_n(x)$ för alla $x \in [0, 1]$ och alla n.

   (a) Visa att $\lim_{n \to \infty} g_n(x)$ existerar för all $x \in [0, 1]$.

   (b) Antag vidare att g_n är kontinuerliga funktioner för alla n samt att gränsfunktionen $g(x) \equiv \lim_{n \to \infty} g_n(x)$ är kontinuerlig på $[0, 1]$. Visa att g_n konvergerar likformigt mot g på $[0, 1]$.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK