Detta har hänt på TMA976

till och med läsvecka 7

Peter Kumlin

dagen för vintersolståndet 2018/2019

Innehåll

Dessa anteckningar beskriver kortfattat vad vi gått igenom på föreläsningarna och lite som jag hade hoppats ha tid att gå igenom men där tiden inte tillät att så skedde. Detta bonusmaterial ingår inte i kursen (man behöver inte kunna redovisa det på tentan) men det är inte på något sätt skadligt att ta del av det. Tala gärna om för mig om ni hittar något fel eller om ni har synpunkter på något ytterligare som bör tas med.

1 Vecka 1

Vad gicks igenom vecka 1? Kort presentation av kursens huvudmoment, introduktion av terminologi för differentialekvationer, genomgång av lösningsmetoder för linjära differntialekvationer av ordning 1 (metoden med integrerande faktor) och separabla differentialekvationer, diskussion av existens och entydighet för differentialekvationer av ordning 1 samt formulering av Picards existenssats (se nedan), genomgång av några exempel i detta sammanhang, vidare genomgång av materialet i [D] om linjära differentialekvationer av ordning n allmänt och sedan om specialfallet med konstanta koefficienter, definition av e^{icx} där c är ett komplext tal, och formuleringen av huvudsatsen på sidan 3 i [D].

1.1 Existens/entydighetsresultat för ordinära differentialekvationer

I kapitel 8 i Persson/Böiers envariabelbok (PB1) ges exempel på differentialekvationer av olika ordning och på algoritmer för att hitta lösningar till dessa. Vi kan med bokens hjälp endast visa existens av en lösning till en differentialekvation genom att presentera en explicit lösning. Det sägs inget om entydighet för lösningar. Vi formulerar därför ett par satser som besvarar vissa av dessa frågor. Bevis utelämnas då de förutsätter kunskaper (vissa kompakthetsresultat) som vi inte har tillgängliga.

Vi inskränker oss till följande problem: Har differentialekvationen

$$(*) \quad \begin{cases} y' = g(x,y), \quad x \in I \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

där I är ett intervall som innehåller x_0, en lösning $y(x)$ för $x \in I$?

Denna fråga besvaras delvis av följande två satser där den första satsen även uttalar sig om entydigheten.

Sats 1.1 (Picard). *Låt $\Omega = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, $a, b > 0$, vara en omgivning av (x_0, y_0) där funktionen $g(x,y)$ är kontinuerlig och uppfyller ett Lipschitz-villkor i y, dvs det finns ett reellt tal M sådant att*

$$|g(x,y_1) - g(x,y_2)| \le M|y_1 - y_2|, \ \ \textit{alla} \ \ (x,y_1),(x,y_2) \in \Omega.$$

Då har differentialekvationen $(*)$ en entydigt bestämd kontinuerligt deriverbar lösning $y(x)$ i ett intervall $[x_0 - c, x_0 + c] \subset [x_0 - a, x_0 + a]$ för något $c > 0$. Om $\Omega = [x_0 - a, x_0 + a] \times \mathbb{R}$, $a > 0$, så gäller $c = a$.

Bevisiden bygger på att man studerar följden $y_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ av s.k. Picarditerationer definierade av

$$\begin{cases} y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, y_0)\, dt \\ y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, y_n(t))\, dt, \ n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Vi noterar här att en kontinuerlig funktion $y(x)$ är en lösning till $(*)$ om och endast om $y(x)$ satisfierar

$$(**) \quad y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t, y(t))\, dt, \quad x \in I.$$

Observera att om $y(x)$ är en kontinuerlig funktion som satisfierar $(**)$ så är $y(x)$ en kontinuerligt deriverbar funktion. Det återstår att bevisa är att följden $(y_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt på I mot en kontinuerlig funktion $y(x)$ så att man kan gå i gräns i

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt.$$

Sats 1.2 (Peano). *Antag att $g(x,y)$ är kontinuerlig i en omgivning $\Omega = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, $a, b > 0$, av (x_0, y_0). Då har differentialekvationen $(*)$ en kontinuerligt deriverbar lösning $y(x)$ i ett intervall $[x_0 - c, x_0 + c] \subset [x_0 - a, x_0 + a]$ för något $c > 0$.*

Notera att Peanosatsen inte uttalar sig om entydigheten av lösningen. Ett exempel på en differentialekvation där Peanos men inte Picards existenssats är tillämplig är följande:

$$(+) \quad \begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}, & x \in I \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

där I är ett intervall som innehåller $x = 0$. Här är inte g Lipschitz-kontinuerlig (men väl kontinuerlig) i en omgivning av $(0,0)$. Medelvärdessatsen ger ju att

$$|g(y) - g(0)| = |g'(\xi)||y - 0|,$$

där ξ ligger mellan y och 0, och g' är obegränsad i varje intervall $(0, \epsilon)$, $\epsilon > 0$. Det gäller att

$$y_{a,b}(x) = \begin{cases} (x-b)^3, & x > b \\ 0, & a \le x \le b \\ (x-a)^3 & x < a \end{cases}$$

är lösningar till $(+)$ för varje $a \le 0 \le b$. Speciellt är $y(x) = x^3$ en lösning till $(+)$. Detta gäller också funktionen $y = 0$. Vi har alltså oändligt många lösningar till $(+)$ vars lösningskurvor går genom $(0,0)$. .

Vad gäller entydigheten av lösningar i Picardsaten är detta lätt att visa. Antag att $y_1(x), y_2(x)$ är två lösningar till $(*)$ i $[x_0, x_0 + \epsilon]$, $\epsilon > 0$. Då gäller

$$|y_1(x) - y_2(x)| = |\int_{x_0}^{x} (g(t, y_1(t)) - g(t, y_2(t)))\, dt| \le$$

$$\le M \int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_2(t)|\, dt, \quad x \in [x_0, x_0 + \epsilon].$$

Sätt $\lambda(x) = \int_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_2(t)|\, dt$. Notera att $\lambda(x_0) = 0$. Det gäller att

$$\lambda'(x) \leq M\lambda(x), \quad x \in (x_0, x_0 + \epsilon),$$

och alltså $(e^{-Mx}\lambda(x))' \leq 0$ för $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$. Integration över intervallet $[x_0, x]$ ger

$$0 \leq \lambda(x) \leq e^{M(x-x_0)}\lambda(x_0) = 0, \quad x \in [x_0, x_0 + \epsilon].$$

Alltså $\lambda(x) = 0$ för $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$. På liknande sätt visas påståendet för $x \leq x_0$.

För n:te ordningens differentialekvationer av typen

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), & x \in I \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)} = y_{n-1} & \end{cases}$$

skrivs dessa om som **system av 1:a ordningens differentialekvationer** med

$$\begin{cases} u_1 = y \\ u_2 = y' \\ \ldots \\ u_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$

enligt

$$\begin{cases} u_1' = u_2, & u_1(x_0) = y_0 \\ u_2' = u_3, & u_2(x_0) = y_1 \\ \ldots & \ldots \\ u_{n-1}' = u_n, & u_{n-1}(x_0) = y_{n-2} \\ u_n' = f(x, u_1, u_2, \ldots, u_n), & u_n(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Metoden med Picarditerationer, en vektorvärd version, kan tillämpas här.

För vidare studium hänvisas till exempelvis K.G.Andersson/L-C.Böiers: Ordinära differentialekvationer, Studentlitteratur.

2 Vecka 2

Vad gicks igenom vecka 2? Förskjutningsregeln och satsen på sidan 3 i [D] bevisades. Genomgång av olika ansatser för partikulärlösningar till linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter inklusive en allmän formel med Greenfunktionen till problemet, Eulers differentialekvation. Formulering och (två!) bevis av Taylors formel, och standardutvecklingen för den elementära funktionen e^x gavs.

2.1 Partiallösningar till linjära ode

I samband med diskussionen om hur olika ansatser för partiallösningar till linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter kan väljas gavs ett allmänt "recept" som vi formulerar som en sats.

Sats 2.1. *Låt $G(x)$ vara den lösning till*

$$P(D)y \equiv y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots a_0 y = 0$$

som uppfyller villkoren $y(0) = y'(0) = \dots y^{(n-2)} = 0$, $y^{(n-1)} = 1$. Då är

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} G(x-t) f(t)\, dt$$

en lösning till $P(D)y = f(x)$. Denna lösning y_p uppfyller villkoren

$$y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Funktionen $G(x)$ kallas Greenkärna m.a.p. differentialoperatorn $P(D)$. Beviset för denna sats bygger på upprepad användning av satsen om derivering under integraltecknet, se Persson/Böiers flervariabelbok (PB2) Sats 2 sid 186. För läsarens bekvämlighet formulerar vi påståendet i den satsen här: Om $h(x,t)$ och $h'_x(x,t)$ är kontinuerliga funktioner i x och t gäller

$$\frac{d}{dx}\int_0^x h(x,t)\, dt = h(x,x) + \int_0^x h'_x(x,t)\, dt.$$

Bevisiden är här att studera differenskvoten för $I(x) \equiv \int_0^x h(x,t)\, dt$, dvs

$$\frac{1}{s}(I(x+s) - I(x)) = \int_0^x \frac{h(x+s,t) - h(x,t)}{s}\, dt + \frac{1}{s}\int_x^{x+s} h(x+s,t)\, dt$$

där man måste visa att första termen $\to \int_0^x h'_x(x,t)\, dt$ och andra termen $\to h(x,x)$ då $s \to 0$.

Ett exempel på en tillämpning av denna sats ges av

$$y'' - y = \frac{1}{e^x + 1},$$

där en liten kalkyl ger $G(x) = \sinh(x)$ och

$$y_p(x) = \int_0^x \sinh(x-t)\frac{1}{e^t+1}\, dt = \dots = \sinh x \cdot \ln\frac{e^x+1}{2} + \frac{1}{2}(e^x - xe^x - 1).$$

Speciellt uppfyller y_p villkoren $y(0) = y'(0) = 0$ då x_0 valts till 0.

2.2 Lite till om ode

Vi har noterat att för linjär differentialoperatorer $P(D)$ med konstanta koefficienter gäller

$$P(D)[y] = (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)[y] = (D - r_1)^{m_1} \dots (D - r_k)^{m_k}[y],$$

där $r_1, \ldots, r_k$ är rötterna till motsvarande karakteristiska ekvation med multipliciteterna $m_1, \ldots, m_k$. Motsvarande faktorisering låter sig inte allmänt göras i fallet med variabla koefficienter $a_{n-1}(x), \ldots, a_0(x)$. Det kan göras ibland vilket följande exempel visar.

Betrakta allmänt operatorn $P(D)[y] = (D^2 + a_1(x)D + a_0(x))[y]$. Då

$$((D - r_1(x))(D - r_2(x)))[y] = (D - r_1(x))[y' - r_2(x)y] =$$

$$= y'' - (r_1(x) + r_2(x))y' + (r_1(x)r_2(x) - r_2'(x))y$$

gäller att

$$P(D)[y] = f(x) \Longleftrightarrow ((D - r_1(x))(D - r_2(x)))[y] = f(x)$$

om

$$a_1(x) = -r_1(x) - r_2(x), \quad a_0(x) = r_1(x)r_2(x) - r_2'(x).$$

Differentialekvationen löses då genom att lösa systemet av första ordningens linjära differentialekvationer

$$\begin{cases} (D - r_1(x))[z(x)] = f(x), \\ (D - r_2(x))[y(x)] = z(x) \end{cases}$$

Varför inte försöka lösa differentialekvationen $y'' - 2xy' + (x^2 - 1)y = x$ på detta sätt genom att hitta lämpliga $r_1(x)$ och $r_2(x)$. Lämpligt val är $r_1(x) = r_2(x) = x$. Genomför kalkylerna.

Låt oss exemplifiera en annan metod att hantera homogena linjära differentialekvationer utgående från ett exempel.
Betrakta

$$y'' - y' \cos x + y \sin x = 0.$$

Givet att vi känner till en lösning $v(x)$ till differentialekvationen ovan ansätter vi

$$y(x) = v(x)w(x).$$

Om man deriverar $y(x)$ och sätter in i differentialekvationen reduceras denna linjära differentialekvation i y av andra ordningen till en linjär differentialekvation av första ordningen i w'. Konkret i fallet ovan, om man sättter $v(x) = e^{\sin x}$ så fås

$$w'' + w' \cos x = 0,$$

en ekvation som kan lösas med integrerande faktor. Metoden låter sig lätt generaliseras.

Mycken möda har genom historien lagts ner på att hitta explicita lösningar till diverse differentialekvationer, linjära såväl som icke-linjära. Tekniken har varit att göra listiga variabelsubstitutioner och omskrivningar. Vi kan här bara peka på ett par sådana associerade med några kända gubbar.

Variabelbyte i oberoende variabeln:

Eulers diff.-ekv.:

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 xy' + a_0 y = f(x), \quad x > 0$$

Sätt $t = \ln x$.

Variabelbyte i beroende variabeln:

Bernoullis diff.-ekv.:

$$y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0, \quad \alpha \neq 0, 1.$$

Sätt $z(x) = y(x)^{1-\alpha}$

Böcker med långa listor av differentialekvationer med explicita lösningar finns att studera. Fördelen med en explicit lösning är att man lättare kan studera lösningens beroende på ingående parametrar.

2.3 Olika varianter av resttermen i Taylors formel

På sidorna 437-439 ges ett bevis för Taylors formel som byggar på att man använder Cauchys medelvärdessats. Om man gör andra val av funktionen $h(t)$ på sidan 438 än $(x-t)^{n+1}$ får man andra former av resttermen. Räkna t.ex. med $h(t) = x - t$ och se vad ni får. Själv fick jag

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\,(x-0).$$

3 Vecka 3

Vad gicks igenom vecka 3? Entydighetssatsen för Taylorutvecklingar visades. Tillämpningar av Taylors formel/Taylorutvecklingar. l´Hospitals regel med bevis, differensekvationer speciellt linjära av andra ordningen med konstanta koefficienter, hur allmänna homogenlösningen tas fram via karakteristiska polynomet till differensoperatorn, lämpliga ansatser för att bestämma partikulärlösningar.

3.1 Ordo-begreppen

I samband med Taylorutvecklingar har ordo-symbolen (stora ordo och lilla ordo) använts. Vi ger här en definition av begreppen. Låt $h(x)$ vara en funktion med definitionsmämngd D_f, där $D_f \cap [-c, c] \neq \emptyset$ för alla $c > 0$. n nedan betecknar ett icke-negativt heltal där x^0 tolkas som 1.

$h(x) = \mathcal{O}(x^n)$ då $x \to 0$ betyder att det finns ett intervall $I = [-c, c]$, $c > 0$ och ett reellt tal M så att

$$|h(x)| \leq M|x|^n, \text{ alla } x \in [-c, c] \cap D_f.$$

$h(x) = o(x^n)$ då $x \to 0$ betyder att

$$\lim_{0 \neq x \to 0} \frac{h(x)}{|x|^n} = 0.$$

Speciellt följer att $h(x) = o(x^n)$ medför $h(x) = \mathcal{O}(x^n)$ men omvändningen gäller ej. Beteckningarna $\mathcal{O}((x-a)^n)$ och $o((x-a)^n)$ då $x \to a$ definieras analogt.

Påståendet att en funktion $g(x)$ är kontinuerlig i $x = a$ kan med ordosymbolen skrivas

$$g(x) = g(a) + o(1), \ x \to a.$$

Påståendet att en funktion $g(x)$ är deriverbar i $x = a$ med derivatan $g'(a)$ kan med ordosymbolen skrivas

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + o(x-a), \ x \to a.$$

Vi noterar några räkneregler för $\mathcal{O}(x^n)$ där n och m är icke-negativa heltal.

- Om $h(x) = \mathcal{O}(x^n)$ så är även $h(x) = \mathcal{O}(x^m)$ då $m < n$
- Om $m < n$ så är $\mathcal{O}(x^m) + \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^m)$
- $c\mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$ där c är en konstant
- $x^m\mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^{n+m})$
- $\mathcal{O}(x^n) \pm \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^n)$
- $\mathcal{O}(x^m) \cdot \mathcal{O}(x^n) = \mathcal{O}(x^{m+n})$
- Om $y = \mathcal{O}(x^n)$ så är $\mathcal{O}(y^m) = \mathcal{O}(x^{nm})$

För $o(x^n)$ finns motsvarande räkneregler men vi utelämnar dessa.

3.2 l´Hospitals regel

Vi noterar att antagandet i l´Hospitals regel att $g'(x)$ har konstant tecken i intervallen (x_1, x_0) och (x_0, x_2) (kan vara olika i de olika intervallen) är ekvivalent med det till synes svagare antagandet $g'(x) \neq 0$. Detta är en konsekvens av Darboux sats som gåtts igenom förra läsperioden. För läsarens bekvämlighet formuleras den satsen här.

Sats 3.1 (Darboux)**.** *Antag att g är en deriverbar funktion på intervallet $[a, b]$. Då finns för varje γ mellan $g'(a)$ och $g'(b)$ ett tal $\xi \in (a, b)$ sådant att*

$$g'(\xi) = \gamma.$$

Observera att det inte förutsätts att $g(x)$ är kontinuerligt deriverbar. Det finns deriverbara funktioner som inte har kontinuerlig derivata. Ett exempel är

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

som är deriverbar för alla x men vars derivata inte är kontinuerlig i $x = 0$.

Ett exempel som visar att villkoret $g'(x) \neq 0$ i l´Hospitals regel inte kan försummas:

Sätt

$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{1}{2} \sin 2x \\ g(x) = e^{\sin x} f(x). \end{cases}$$

Vi noterar nu att

1. $g(x) \to +\infty, \ x \to +\infty$
2. $f'(x), g'(x)$ existerar
3. $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x}{e^{\sin x}(x + \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x)} \to 0, \ x \to +\infty$ (där en faktor $\cos x$ förkortats)

   men

4. $\frac{1}{e} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq e$ för all $x \geq 3$ (t ex), vilket innebär att $\frac{f(x)}{g(x)} \not\to 0, \ x \to +\infty$

l'Hopsitals regel är **inte** tillämpbar då $g'(x)$ växlar tecken i varje intervall (a, ∞), $a \in \mathbb{R}$.

Det är sällan som l'Hospitals regel är "ett måste" för att visa existens av gränsvärden. Vi kompletterar ELW:s exempel på sidan 25 och uppgift 1644a med alternativa argument:

Ex 1: $\lim_{x \to \infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) = 1$ inses från

$$x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) = x \int_x^\infty \frac{1}{1+t^2}\, dt = x([\frac{t}{1+t^2}]_x^\infty + \int_x^\infty \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\, dt) =$$

$$= -\frac{x^2}{1+x^2} + 2x\int_x^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt - 2x\int_x^\infty \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Detta ger

$$x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) = x\int_x^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{x^2}{1+x^2} + 2x\int_x^\infty \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt,$$

där $|2x\int_x^\infty \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt| \le \frac{2x}{1+x^2}\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt \to 0$ då $0 \le x \to \infty$. Låt $x \to \infty$ och påståendet följer.

1644a: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt = 1$ inses från

$$\frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt = \frac{\ln x}{x}([\frac{t}{\ln t}]_2^x + \int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,dt) = \frac{\ln x}{x}(\frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^{\sqrt{x}} \frac{1}{(\ln t)^2}\,dt + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,dt).$$

Vidare gäller

$$0 \le \frac{\ln x}{x}\int_2^{\sqrt{x}} \frac{1}{(\ln t)^2}\,dt \le \frac{\ln x}{x}\sqrt{x}\frac{1}{(\ln 2)^2} \to 0$$

då $2 \le x \to \infty$ och

$$0 \le \frac{\ln x}{x}\int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,dt \le \frac{\ln x}{x}x\frac{1}{(\ln\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}\ln x} \to 0$$

då $2 \le x \to \infty$. Påståendet följer.

3.3 En mycket snäll funktion

I samband med Taylorutvecklingar kan man studera funktionen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

Denna funktion är kontinuerligt deriverbar på $\mathbb{R}$ hur många gånger som helst, betecknat $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, och speciellt gäller $f^{(n)}(0) = 0$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$ Visa detta! Detta innebär att f har en Taylorserie $\Sigma_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ som konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$, eftersom $\Sigma_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$, samtidigt som $f(x) > 0$ för $x > 0$. Detta medför att $f(x) = \Sigma_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ för alla $x \in [-\epsilon, \epsilon]$ **endast** för $\epsilon = 0$. Funktioner med egenskapen att det för alla $x \in \mathbb{R}$ finns ett $\epsilon = \epsilon(x) > 0$ så att

$$f(x) = \Sigma_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\ x \in [-\epsilon, \epsilon]$$

kallas real-analytiska. Exemplet ovan visar att det finns funktioner i $C^\infty(\mathbb{R})$ som inte är real-analytiska.

3.4 Differensekvationer

Vi observerar att linjära differensekvationer med konstanta koefficienter kan skrivas om som matrisekvationer enligt följande: För

$$(*) \quad y_{n+p} + a_{p-1}y_{n+p-1} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

sätter vi

$$Y_n = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+p-1} \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

och

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{p-1} \end{bmatrix}.$$

A är en $p \times p$–matris. Vi kan då skriva $(*)$ som

$$Y_{n+1} = AY_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

vilket ger

$$Y_n = A^n Y_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Den karakteristiska ekvationen till $(*)$, dvs

$$(+) \quad r^p + a_{p-1}r^{p-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0$$

är lika med sekularekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$, där I betcknar enhetsmatrisen av typ $p \times p$, dvs

$$(++) \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{p-1} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

med $r = \lambda$. Sekularekvatinens rötter är egenvärdena till matrisen A. Spektralsatsen för matriser ger att A^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, lätt kan beräknas för diagonaliserbara matriser A vilket kommer att diskuteras i den kommande kursen i linjär algebra (eller kanske redan behandlats i den första kursen i linjär algebra). Läsaren uppmanas att redan nu och med hjälp av räknereglerna för determinanter visa att ekvationerna i (+) och (++) är desamma.

Vi tillämpar matrisformuleringen på exempel 19 sidan 46 i ELW. Fibonaccis talföljd $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ definieras av

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

och dyker upp vid beskrivning av ett flertal fenomen i naturen. Om vi sätter

$$Y_n = \begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

och

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

kan differensekvationen skrivas

$$Y_n = A^n Y_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Egenvärdena till A (och då även rötterna till den karakteristiska ekvationen för $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$) är lika med

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

4 Vecka 4

Vad gicks igenom vecka 4? Fixpunktssatsen med uppskattningar. Diskussion om monotona talföljders konvergens. Newton-Raphsons metod med uppskattningar, serier och begreppen konvergens/divergens, nödvändigt villkor för konvergens (kriterium för divergens), positiva serier och huvudsatsen för positiva serier, integralkriteriet.

4.1 Fixpunktssatsen

Vi kallar, se INR, en funktion $f : I \to I$ en **kontraktion på intervallet** I om det finns ett positivt reellt tal k, $k < 1$ så att

$$x, \tilde{x} \in I \Rightarrow |f(x) - f(\tilde{x})| \leq k|x - \tilde{x}|.$$

Följande sats gäller enligt INR:

Sats 4.1 (fixpunktssatsen)**.** *Antag att* $I = [a, b]$*,* $a<b$*, och*

1. $f : I \to I$
2. f *är en kontraktion på* I*.*

Då gäller att

1. det finns en entydigt bestämd fixpunkt $\alpha \in I$, dvs $f(\alpha) = \alpha$, och

2. för varje $x_0 \in I$ gäller att följden $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, där

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

konvergerar och har gränsvärdet α (= fixpunkten).

Notera att

- f ovan är en kontraktion om f är en deriverbar funktion på I och

$$\sup_{x \in I} |f'(x)| < 1.$$

- Följande uppskattningar gäller (beteckningar enligt satsen ovan)

A :

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq k|x_n - \alpha|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(följer direkt från kontraktionsegenskapen för f)

B :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{1-k}|x_{n+1} - x_n|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(följer från

$$|x_n - \alpha| = |x_n - f(x_n) + f(x_n) - \alpha| \leq |x_n - x_{n+1}| + |f(x_n) - f(\alpha)| \leq$$

$$\leq |x_n - x_{n+1}| + k|x_n - \alpha|.)$$

Jämför dessa uppskattningar med motsvarande uppskattningar för Newton-Raphsons metod.

- Intervallet $I = [a, b]$ kan inte ersättas av intervallet (a, b) i fixpunktssatsen. Betrakta t ex funktionen $f(x) = \frac{x}{2}$ på intervallet $(0, 1)$ som är en kontraktion på intervallet $(0, 1)$ men saknar fixpunkt.

- Fixpunktssatsen gäller även för $I = \mathbb{R}$ (och även $I = [a, \infty)$ och $I = (-\infty, b]$) men beviset får modifieras lite. Gör detta. Utnyttja t ex att

$$x - f(x) \to \infty, x \to \infty$$

och

$$x - f(x) \to -\infty, x \to -\infty.$$

Dock gäller inte ¨fixpunktssatsen¨ om $I = \mathbb{R}$ och f inte är en kontraktion på I men uppfyller

$$x, \tilde{x} \in I,\ x \neq \tilde{x} \Rightarrow |f(x) - f(\tilde{x})| < |x - \tilde{x}|.$$

Se t ex vad som gäller för

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}e^x & x \leq 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & x > 0 \end{cases}$$

Vi ger två lösningar till uppgift 1818a i ELW, en baserad på fixpunktssatsen och den andra på satsen om monotona talföljders konvergens.

Problem: Sätt $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$ Visa att $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar och beräkna dess gränsvärde.

Lösning med fixpunktssatsen:
Sätt $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Detta ger $x_{n+1} = f(x_n)$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$ Vi noterar att $f(x)$ är en avtagande funktion för $x > -1$ och att $f(1) = \frac{1}{2}$ ($x_1 = 1$). Vidare är $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$. Alltså gäller

$$f : [\frac{1}{2}, 1] \to [\frac{1}{2}, 1].$$

Dessutom ger medelvärdessatsen att

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\eta_{x,y})|\,|x - y|$$

för alla $x, y \in [\frac{1}{2}, 1]$ för något $\eta_{x,y}$ mellan x och y. Då $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ gäller

$$\max_{x\in[\frac{1}{2},1]} |f'(x)| = \frac{4}{9} < 1,$$

och alltså är $f(x)$ en Lipschitzkontinuerlig funktion med Lipschitzkonstant $k = \frac{4}{9} < 1$, dvs f är en kontraktion på $[\frac{1}{2}, 1]$. Fixpunktssatsen ger då att $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot f:s entydigt bestämda fixpunkt i ξ i $[\frac{1}{2}, 1]$. Fixpunkten bestäms av $\xi = f(\xi)$ dvs

$$\xi^2 + \xi - 1 = 0, \;\; \xi \in [\frac{1}{2}, 1].$$

Vi får $\xi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Lösning med satsen om monotona följders konvergens:
Vi börjar med att beräkna de första talen i talföljden.

$$x_1 = 1,\; x_2 = \frac{1}{2},\; x_3 = \frac{2}{3},\; x_4 = \frac{3}{5},\; x_5 = \frac{5}{8},\; x_6 = \frac{8}{13},\; \ldots$$

Det förefaller som om $(x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ är en avtagande och $(x_{2n})_{n=1}^{\infty}$ är en växande följd (detta vet vi från från iterationstolkningen då $f' \leq 0$, se INR, men det är ju inte kunskap vi ska använda här). Låt oss (t.ex.) visa att $(x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ är en avtagande följd. Vi noterar att

$$x_{2n+1} - x_{2n-1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x_{2n-1}}} - x_{2n-1} = \frac{1 + x_{2n-1}}{2 + x_{2n-1}} - x_{2n-1} =$$

$$= \frac{1}{2 + x_{2n-1}} \cdot (1 - x_{2n-1} - x_{2n-1}^2).$$

Från definitionen ser vi att $x_k > 0$ för alla positiva heltal k och vidare att $x_{2n+1} - x_{2n-1} < 0$ om $1 - x_{2n-1} - x_{2n-1}^2 < 0$. Detta är ekvivalent med att

$x_{2n-1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Vi har att $x_1 > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Återstår att visa att $x_{2n-1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ medför att $x_{2n+1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Men

$$x_{2n+1} = \frac{1+x_{2n-1}}{2+x_{2n-1}} = 1 - \frac{1}{2+x_{2n-1}} > 1 - \frac{1}{2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 1 - \frac{2}{3+\sqrt{5}} =$$

$$= 1 - \frac{2(3-\sqrt{5})}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Induktion ger alltså att $(x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ är en avtagande följd då $x_{2n-1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ för alla positiva heltal n. Detta ger enligt satsen om monotona talföljders konvergens att $(x_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ konvergerar och har gränsvärdet

$$\tilde{\xi} = \frac{1+\tilde{\xi}}{2+\tilde{\xi}}.$$

En liten kalkyl (observera att $\tilde{\xi} \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$) ger

$$\tilde{\xi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \xi.$$

Vidare gäller

$$x_{2n} = \frac{1}{1+x_{2n-1}} \to \frac{1}{1+\xi} = \ldots = \xi,\ n \to \infty.$$

Alltså är $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent med gränsvärdet $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

4.2 Newton-Raphsons metod

Fixpunktssatsen kan (ibland) användas för att lösa ekvationen $f(x) = x$. Om man vill lösa ekvationen $f(x) = 0$ kan (ibland) Newton-Raphsons metod användas. Men även om $f'(x) \neq 0$ för alla x så är man inte garanterad att $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergerar där $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ (vald) och

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Följande uppskattningar (som delvis återfinns i INR) gäller om $I \subset \mathbb{R}$ är ett intervall med $x_n, x_{n+1}, \alpha \in I$, där $f(\alpha) = 0$, och $f \in C^2(I)$ i fall **A** och $f \in C^1(I)$ i fall **B**.

A :

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{K}{2L}|x_n - \alpha|^2,$$

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{K}{2L}|x_{n+1} - x_n|^2.$$

B :

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M}{L}|x_{n+1} - x_n|,$$

där $L = \inf_{x\in I} |f'(x)|$, $M = \sup_{x\in I} |f'(x)|$ och $K = \sup_{x\in I} |f''(x)|$.

Tips: För att visa uppskattning **A** Taylorutvecklar man lämpligen kring $x = x_n$ med en restterm på Lagrange form av ordning 2 och betraktar fallen $x = \alpha$ respektive $x = x_{n+1}$.

5 Vecka 5

Vad gicks igenom vecka 5? Jämförelsekriteriet inkl dito på gränsvärdesform med exempel. Rot- och kvotkriterierna (generalisering av rotkriteriet med ¨lim¨ ersatt med ¨limsup¨ hanns inte med i detalj). Vidare diskussion av begreppen absolutkonvergent serie och betingat konvergent serie samt formulering av Leibniz´ konvergenskriterium för alternerande serier och bevis av detta. Begreppet omordning av serier studerades. Potensserier och deras konvergensområden samt hur man beräknar konvergensradier gicks igenom.

5.1 Några referensserier

För att kunna använda jämförelsekriterier för positiva serier behöver man känna till konvergens/divergens för några serier. Bra att kunna är att för $p, q \in \mathbb{R}$ gäller:

- Serien
$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ konvergerar}$$
om och endast om
$$p > 1.$$
- Serien
$$\Sigma_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^q} \text{ konvergerar}$$
om och endast om
$$q > 1.$$
- Serien
$$\Sigma_{n=1}^{\infty} r^n \text{ konvergerar}$$
om och endast om
$$|r| < 1.$$

5.2 Rot ¨bättre än¨ kvot

Låt oss med rot-/kvotkriteriernas hjälp försöka avgöra om serien $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerar eller ej där

$$a_n = \begin{cases} (\frac{1}{2})^k & n = 2k,\ k = 1, 2, 3, \dots \\ \\ (\frac{1}{2})^k & n = 2k+1,\ k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Här ser vi att

$$\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{\sqrt{2}},\ n \to \infty$$

då

$$\sqrt[2k]{a_{2k}} \to \frac{1}{\sqrt{2}},\ k \to \infty$$

och

$$\sqrt[2k+1]{a_{2k+1}} \to \frac{1}{\sqrt{2}},\ k \to \infty.$$

Rotkriteriet ger då att serien ovan konvergerar. Men

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} \to 1,\ k \to \infty$$

och

$$\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} \to \frac{1}{2},\ k \to \infty$$

varför kvotkriteriet inte kan avgöra konvergens/divergens för serien.

Detta är ingen slump! Det gäller att om

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

existerar så existerar också

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

och

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Visa detta.

5.3 Lite till om numeriska serier

För något år sedan, alltså inte i år, noterade vi på föreläsning att rot-/kvotkriterierna inte förmådde avgöra om och när den positiva serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$, där $a_k = \frac{1}{k^p}$ med parameter $p \in \mathbb{R}$, konvergerar. Dessa kriterier bygger på jämförelse med geometriska serier och när $\sqrt[k]{a_k} \to 1/\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 1$ då $k \to \infty$ kan inget sägas om seriens konvergens. Vet man lite mer, t ex hur snabbt $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ går mot 1 då $k \to \infty$ kan man säga lite mer. Detta är innehållet i Raabes konvergenskriterium som vi gick igenom då och som vi nu formulerar som en sats här.

Sats 5.1 (Raabes konvergenskriterium)**.** *Låt $a_k > 0$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$ och antag att*

$$k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) \to L, \quad k \to \infty.$$

Då gäller att

1. *$L > 1$ medför att $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar*
2. *$L < 1$ medför att $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar*
3. *$L = 1$ medför att ingen slutsats kan dras.*

Läsaren uppmanas att tillämpa Raabes kriterium på serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ där $p \in \mathbb{R}$. Vi får "rätt resultat i fallen $p \neq 1$" men för $p = 1$ kan ingen slutsats dras.

Vi skisserar nu beviset för Raabes kriterium.
Fall 1: Antag $L > 1$. Då finns ett heltal N och ett $\epsilon > 0$ så att

$$k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) > 1 + \epsilon, \quad k \geq N,$$

dvs det gäller att

$$ka_k - (k+1)a_{k+1} > \epsilon a_{k+1}, \quad k = N, N+1, N+2, \ldots$$

Summera nu dessa olikheter för $k = N, N+1, \ldots, m$. Vi får

$$Na_N - (m+1)a_{m+1} > \epsilon \Sigma_{k=N+1}^{m+1} a_k.$$

Detta ger

$$\Sigma_{k=N+1}^{m+1} a_k < \frac{1}{\epsilon} Na_N, \quad m \geq N,$$

och enligt huvudsatsen för positiva serier konvergerar $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ eftersom dess partialsummor är uppåt begränsade.
Fall 2: Antag $L < 1$. Då finns ett heltal N och ett $\epsilon > 0$ så att

$$k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) < 1 - \epsilon, \quad k \geq N,$$

dvs det gäller att

$$ka_k < (k+1)a_{k+1} - \epsilon a_{k+1}, \quad k = N, N+1, N+2, \ldots.$$

Följdaktligen gäller att $ka_k < (k+1)a_{k+1}$ och alltså

$$\frac{C}{k} < a_k \quad k = N, N+1, N+2, \ldots$$

för något positivt reellt tal C. Då serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergerar divergerar $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ enligt jämförelsekriteriet för positiva serier.

5.4 Limes superior/limes inferior

Vi noterade i samband med rotkriteriet för positiva serier att att påståendet i satsen (med betecknigar enligt ELW) också gäller om

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = A$$

ersätts av

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = A.$$

Definitionen av ¨limsup¨ för en begränsad talföljd $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ ges av

$$(*) \quad \limsup_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \sup\{x_n : n \geq k\}.$$

Här ser vi att $(z_k)_{k=1}^{\infty}$, där $z_k = \sup\{x_n : n \geq k\}$, bildar en avtagande, begränsad talföljd som konvergerar enligt satsen om monotona talföljders konvergens. Följdakligen existerar $\limsup_{k\to\infty} x_k$ och karakteriseras av att

$$\tilde{x} = \limsup_{k\to\infty} x_k$$

uppfyller villkoren att

1. för varje $\epsilon > 0$ existerar ett positivt heltal N så att

   $$k \geq N \Rightarrow x_k < \tilde{x} + \epsilon$$

   och

2. för varje $\epsilon > 0$ och varje positivt heltal N finns ett $k \geq N$ så att

   $$x_k > \tilde{x} - \epsilon.$$

Om ¨sup¨ byts ut mot ¨inf¨ i $(*)$ fås begreppet limes inferior för en talföljd $(x_k)_{k=1}^{\infty}$. Det gäller för varje begränsad talföljd $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ att $\limsup_{k\to\infty} x_k$ och $\liminf_{k\to\infty} x_k$ existerar och vidare att

$$-\infty < \liminf_{k\to\infty} x_k \leq \limsup_{k\to\infty} x_k < \infty.$$

Om $\liminf_{k\to\infty} x_k = \limsup_{k\to\infty} x_k$ existerar $\lim_{k\to\infty} x_k$ och är lika med $\limsup_{k\to\infty} x_k$.

Ex: $x_k = (-1)^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, har

$$\limsup_{k\to\infty} x_k = 1$$

$$\liminf_{k\to\infty} x_k = -1$$

men

$$\lim_{k\to\infty} x_k \text{ existerar ej.}$$

5.5 Omordning av serier

Slutligen levererar vi bevis för satserna 18.15 och 18.16 i ELW. $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ är en **omordning** av serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ om σ är en permutation av $(1,2,3,\ldots)$, dvs σ är en bijektion på mängden $\{1,2,3,\ldots\}$. Detta innebär att

- $\sigma(k) = \sigma(l)$ medför $k = l$, och
- för alla positiva heltal k finns positivt heltal l så att

$$\sigma(l) = k.$$

Vi visar nu att varje omordning $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ av en absolutkonvergent serie $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent och har samma summa som $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$.
Antag alltså att $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent, dvs $\Sigma_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är en konvergent positiv serie. Då är $\Sigma_{k=1}^{\infty} |a_{\sigma(k)}|$ en konvergent positiv serie eftersom en övre begränsning A till partialsummorna $\Sigma_{k=1}^{n} |a_k|$, $n = 1,2,3,\ldots$ också är en övre begränsning till partialsummorna $\Sigma_{k=1}^{n} |a_{\sigma(k)}|$, $n = 1,2,3,\ldots$. Detta följer av att för varje n gäller

$$\Sigma_{k=1}^{n} |a_{\sigma(k)}| \leq \Sigma_{k=1}^{\max\{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)\}} |a_k| \leq A.$$

Alltså är $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ en absolutkonvergent serie. Antag nu att S är summan av serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$. Det återstår att visa att också $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ har summan S. Fixera $\epsilon > 0$ och välj ett positivt heltal N så att

$$\Sigma_{k=N}^{\infty} |a_k| < \epsilon.$$

Detta är möjligt då $\Sigma_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergerar. Sätt

$$\tilde{N} = \min\{n : \{1,2,\ldots,N\} \subset \{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n)\}\}.$$

Vi har

$$|\Sigma_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} - S| \leq \Sigma_{k=N}^{\infty} |a_k| < \epsilon, \quad n \geq \tilde{N}.$$

Alltså gäller

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} = S.$$

Vi visar nu följande påstående: För varje betingat konvergent serie $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ och varje reellt tal S finns en omordning $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ (finns inte bara en utan oändligt många) som är konvergent och har summan S. Sätt $a_k^+ = \max\{a_k, 0\}$ och $a_k^- = \max\{-a_k, 0\}$. Då är $a_k = a_k^+ - a_k^-$ och $|a_k| = a_k^+ + a_k^-$. Eftersom $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ är betingat konvergent, och alltså $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent medan $\Sigma_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är divergent, divergerar de båda serierna

$$\begin{cases} \Sigma_{k=1}^{\infty} a_k^+ \\ \Sigma_{k=1}^{\infty} a_k^- \end{cases}.$$

Detta gäller p g a att

$$|a_k| = 2a_k^- + a_k = 2a_k^+ - a_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Låt nu $(c_k)_{k=1}^\infty$ vara den delföljd av $(a_k)_{k=1}^\infty$ som består av alla $a_k \geq 0$ och $(d_k)_{k=1}^\infty$ vara den delföljd av $(a_k)_{k=1}^\infty$ som består av alla $a_k < 0$. Skapa nu följden $(a_{\sigma(k)})_{k=1}^\infty$ som

$$c_1, \ldots, c_{n_1}, d_1, \ldots, d_{n_2}, c_{n_1+1}, \ldots, c_{n_3}, d_{n_2+1}, \ldots, d_{n_4}, c_{n_3+1}, \ldots, c_{n_5}, d_{n_4+1}, \ldots$$

där

$$n_1 = \min\{n : c_1 + c_2 + \ldots + c_n > S\}$$
$$n_2 = \min\{n : c_1 + \ldots + c_{n_1} + d_1 + d_2 + \ldots + d_n < S\}$$

och induktivt

$$n_{2k+1} = \min\{n > n_{2k-1} : c_1 + \ldots + c_{n_1} + d_1 + \ldots + d_{n_2} + \ldots + d_{n_{2k-2}+1} + \ldots$$
$$+ d_{n_{2k}} + c_{n_{2k-1}+1} + \ldots + c_n > S\}$$

och

$$n_{2k+2} = \min\{n > n_{2k} : c_1 + \ldots + c_{n_1} + d_1 + \ldots + d_{n_2} + \ldots + c_{n_{2k-1}+1} + \ldots$$
$$+ c_{n_{2k+1} + d_{n_{2k}+1} + \ldots + d_n} < S\}$$

för $k = 1, 2, 3, \ldots$. Det följer att

$$\lim_{k\to\infty} \Sigma_{k=1}^\infty a_{\sigma(k)} = S$$

eftersom $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, då $\Sigma_{k=1}^\infty a_k$ är konvergent, och alltså

$$\lim_{k\to\infty} c_{n_{2k-1}+1} + \ldots + c_{n_{2k+1}} = \lim_{k\to\infty} d_{n_{2k}+1} + \ldots + d_{n_{2k+2}} = 0.$$

Man visar också enkelt att varje betingat konvergent serie har divergenta omordningar.

6 Vecka 6

Vad gicks igenom vecka 6? Termvis derivering/integrering av potensserier och användning av detta för att beräkna summor av potensserier behandlades. Vi visade att lösningar till linjära differentialekvationer kan bestämmas med hjälp av potensserier. Vidare behandlades funktionsföljder och funktionsserier och begreppen punktvis konvergens på ett intervall/likformig konvergens på ett intervall gicks igenom utifrån ett flertal exempel. Exempel som visade på hur fel det kan gå om man kastar om gränsövergångar diskuterades. Diskussion av satser om omkastning av gränsövergångar för likformigt konvergenta funktionsföljder.

6.1 En övningsuppgift

Enligt ett önskemål får ni här ett lösningsförslag på följande uppgift (ELW kapitel 19 uppgift 1908b): Bestäm konvergensintervallet M och summan av potensserien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{2k(2k-1)}.$$

Lösning: Sätt

$$a_k = \begin{cases} 0 & k = 2l-1,\ l = 1,2,3,\dots \\ (-1)^{l-1}\frac{1}{2l(2l-1)} & k = 2l,\ l = 1,2,3,\dots \end{cases}$$

Potensserien kan då skrivas som $\Sigma_{k=1}^{\infty}a_k x^k$. Observera att den ursprungliga potensserien endast innehåller jämna potenser av x.

Beräkning av konvergensradien R: Vi noterar att

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\sup\{\sqrt[2l]{\frac{1}{2l(2l-1)}} : 2l \geq k\} = 1,$$

då

$$\lim_{l\to\infty}\sqrt[2l]{\frac{1}{2l(2l-1)}} = 1.$$

Alltså får vi $R = 1$ (alternativt gör variabelbytet $t = x^2$ och beräkna konvergensradien för potensserien i t och från detta dra slutsats om konvergensradien för potensserien i x).

Beräkning av konvergensintervallet M: Vi vet att varje absolutkonvergent serie konvergerar. Eftersom $\Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergerar följer att

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}|(-1)^{k-1}\frac{(\pm 1)^{2k}}{2k(2k-1)}| = \Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k(2k-1)}$$

konvergerar enligt jämförelsekriteriet på gränsvärdesform och alltså gäller

$$M = [-1,1].$$

Beräkning av potensseriens summa för $x \in M$: Kalla potensseriens summa för $f(x)$. Vi vet att för $|x| < R = 1$ kan vi derivera potensserien termvis och att den resulterande potensserien har samma konvergensradie, dvs 1. Alltså följer att

$$f'(x) = \Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}$$

och på samma sätt fås

$$f''(x) = \Sigma_{k=1}(-1)^{k-1}x^{2k-2} = \Sigma_{k=0}(-x^2)^k = \frac{1}{1+x^2}.$$

Man noterar också att

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

För $|x| < 1$ kan vi bestämma $f(x)$ genom att integrera $\frac{1}{1+x^2}$ två gånger. En första integration från 0 till x ger

$$f'(x) = \arctan x, \ |x| < 1$$

och en andra integration ger

$$f(x) = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2), \ |x| < 1.$$

Vi konstaterar nu att $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ är en kontinuerlig funktion på intervallet $[-1, 1]$. Det återstår nu att bestämma seriens summa för ± 1. Det följer av att serien är absolutkonvergent för ± 1 att potensserien är kontinuerlig i dessa ändpunkter i konvergensintervallet. Vi visar nu detta. Det räcker att studera punkten $x = 1$ då potensseriens summa är en jämn funktion. Fixera $\epsilon > 0$. Ska visa att det finns ett $\delta > 0$ så att

$$x \in (1-\delta, 1] \Rightarrow |\Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{2k(2k-1)} - \Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k(2k-1)}| < \epsilon.$$

Vi noterar att

$$|\Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{2k(2k-1)} - \Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k(2k-1)}| \le \Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k(2k-1)}|1-x^{2k}|.$$

Eftersom den positiva serien $\Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k(2k-1)}$ konvergerar finns positivt heltal N så att

$$\Sigma_{k=N}^{\infty}\frac{1}{2k(2k-1)} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Låt C beteckna summan av $\Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k(2k-1)}$. Detta ger för $|x| \le 1$ att

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k(2k-1)}|1-x^{2k}| \le \Sigma_{k=1}^{N}\frac{1}{2k(2k-1)}|1-x^{2k}| + \frac{\epsilon}{2}.$$

Vi kan nu välja ett $\delta > 0$ så att den första termen i olikhetens högerled blir mindre än $\frac{\epsilon}{2}$ för alla $x \in (1-\delta, 1]$ eftersom

$$\Sigma_{k=1}^{N}\frac{1}{2k(2k-1)}|1-x^{2k}| \le C|1-x^{2N}|.$$

Välj t ex $\delta = 1 - \sqrt[2n]{1-\frac{\epsilon}{2C}}$ där vi antagit att $\frac{\epsilon}{2C} < 1$ vilket inte är någon inskränkning (ni inser varför eller hur?). Vi har visat att potensserien är kontinuerlig i $x = \pm 1$ och alltså är summan lika med $\arctan 1 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

Kommentar: Vi visade i uppgiften ovan att

$$\lim_{x\to 1-}\Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k}}{2k(2k-1)} = \Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k(2k-1)}$$

utgående från att $\Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k(2k-1)}$ är absolutkonvergent. Man kan visa, vilket Abel gjorde, att följande gäller.

Sats 6.1 (Abels sats)**.** *Antag att*

$$f(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \in (-R, R).$$

Om serien konvergerar i $x = R$ så existerar gränsvärdet $\lim_{x \to R-} f(x)$ och

$$\lim_{x \to R-} f(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} a_k R^k.$$

6.2 Omkastning av gränsövergpångar och Sats 1, Sats 2, Sats 2', Sats 2" och Sats 3

Vi gick i veckan igenom några satser som säkerställde att man kunde kasta om gränsövergångar och där **likformig konvergens på en mängd** I var ett nyckelbegrepp. Här betecknade I ett intervall på $\mathbb{R}$, i sats 2 begränsat intervall.

Sats 6.2 (Sats 1)**.** *Antag att $s_n \in C(I)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ och $s_n \to s$ likformigt på I.*
Då gäller $s \in C(I)$.

Sats 6.3 (Sats 2)**.** *Antag att $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Antag vidare att $s_n \in C(I)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ och $s_n \to s$ likformigt på I.*
Då gäller

$$\lim_{n \to \infty} \int_I s_n(x)\, dx = \int_I s(x)\, dx.$$

Sats 6.4 (Sats 2')**.** *Antag att I är ett intervall (kan vara obegränsat). Antag vidare att*
$s_n \to s$ punktvis på I och att
$\int_I s_n(x)\, dx \in \mathbb{R}$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$ (Riemannintegrerbar)
$\int_I s(x)\, dx \in \mathbb{R}$ (Riemannintegrerbar)
och att det existerar en **majorerande funktion** *$g : I \to [0, \infty)$, dvs*

1. *$|s_n(x)| \le g(x)$ för alla $x \in I$ och alla $n = 1, 2, 3, \ldots$,*
2. *$\int_I g(x)\, dx < \infty$ (Riemannintegrerbar).*

Då gäller

$$\lim_{n \to \infty} \int_I s_n(x)\, dx = \int_I s(x)\, dx.$$

Sats 6.5 (Sats 3)**.** *Antag att $s_n \in C^1(I)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ och att $s_n' \to g$ likformigt på I. Antag vidare att $s_n \to s$ punktvis på I.*
Då gäller att $s \in C^1(I)$ och $s' = g$.

Sats 2' gavs utan bevis. Därför formulerades en svagare sats om dominerad konvergens som också bevisades. Nämligen

Sats 6.6 (Sats 2")**.** *Sätt $I = [0, \infty)$. Antag att $s_n \in C(I)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ och $s_n \to s$ likformigt på $[0, a]$ för varje $a > 0$ samt att det existerar en* **majorerande funktion** *$g : I \to [0, \infty)$, dvs*

1. *$|s_n(x)| \leq g(x)$ för alla $x \in I$ och alla $n = 1, 2, 3, \ldots$,*
2. *$\int_I g(x)\, dx < \infty$.*

Då gäller

$$\lim_{n\to\infty} \int_I s_n(x)\, dx = \int_I s(x)\, dx.$$

Beviset bygger på att

- $s \in C([0, \infty))$ vilket följer av sats 1,
- s Riemannintegrerbar på $[0, \infty)$ vilket följer av existensen av majorerande funktionen g samt jämförelsekriteriet för generaliserade integraler (genomgånget i förra läsperioden).
- Fixera $\epsilon > 0$. Välj $L > 0$ sådant att

$$\int_0^L g(x)\, dx < \frac{\epsilon}{4}$$

vilket är möjligt då g är en majorerande funktion. Slutligen välj N sådant att

$$\sup_{x\in[0,L]} |s_n(x) - s(x)| < \frac{\epsilon}{2L}$$

för alla $n \geq N$ vilket är möjligt då $s_n \to s$ likformigt på $[0, L]$. Då gäller

$$|\int_0^\infty s_n(x)\, dx - \int_0^\infty s(x)\, dx| \leq \int_0^\infty |s_n(x) - s(x)|\, dx + \int_L^\infty 2g(x)\, dx < \epsilon$$

för alla $n \geq N$.

Notera att antagandet $s_n \to s$ likformigt på $[0, a]$ för varje $a > 0$ **inte** inte medför att $s_n \to s$ likformigt på $[0, \infty)$. Betrakta t ex

$$s_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus [n, n+1] \end{cases}$$

Vi gav exempel på att den likformiga konvergensen i sats 1, sats 2 och sats 3 inte kunde ersättas med punktvis konvergens. Dessutom såg vi att med $I = [0, \infty)$ och $s_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2}$ gäller att s_n konvergerar likformigt mot nollfunktionen på I medan

$$\int_0^\infty s_n(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \text{ alla positiva heltal } n.$$

Det som omöjliggör att tillämpa sats 2'/sats 2" för omkastning av gränsövergångarna är att funktionsföljden saknar en majorerande funktion. Vi noterade att minsta tänkbara majorerande funktion g på I skulle ges av

$$g(x) = \sup_n |s_n(x)| \quad , x \in I.$$

Denna funktion är avtagande på I, då alla s_n är avtagande funktioner på I, och då också Riemannintegrerbar på varje intervall $[0, R]$, $R > 0$. Men eftersom

$$\frac{d}{dn} s_n(k) = \frac{k^2 - n^2}{(n^2 + k^2)^2} \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

följer via ett teckenstudium att

$$0 \leq s_n(k) \leq s_k(k) = \frac{1}{2k} \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

Av detta fås

$$\int_0^N g(x)\, dx \geq \Sigma_{k=1}^N \frac{1}{2k} \; N = 1, 2, 3, \ldots,$$

jämför beviset av integralkriteriet för positiva serier, vilket medför att

$$\int_0^\infty g(x)\, dx = \infty.$$

Slutligen ytterligare ett par varningens ord om omkastning av gränsövergångar. Låt $a_{n,m} \in \mathbb{R}$ för $n, m = 1, 2, 3, \ldots$. Man kan då fråga sig om

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{n,m} = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{n,m}$$

under några lämpliga antaganden? Vi observerar att om

$$a_{n,m} = \frac{n - m}{n + m}, \quad n, m = 1, 2, 3, \ldots$$

följer

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{n,m} = -1$$

medan

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{n,m} = 1.$$

Låt oss nu definiera konvergens för talföljder med dubbla index enligt följande:

$$a_{n,m} \to a, \quad n, m \to \infty$$

om det för varje $\epsilon > 0$ finns ett N sådant att

$$n, m \geq N \Rightarrow |a_{n,m} - a| < \epsilon.$$

Beteckning: $\lim_{n,m\to\infty} a_{n,m} = a$.

Följande gäller:

Sats 6.7. *Antag att* $\lim_{m\to\infty} a_{n,m}$ existerar *för varje* n.
Då gäller:
$\lim_{n,m\to\infty} a_{n,m} = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{n,m})$ *existerar och är lika med* a.

Bevis: Sätt $b_n = \lim_{m\to\infty} a_{n,m}$. Fixera godtyckligt $\epsilon > 0$. Då finns N_1 sådan att

$$n, m \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad |a_{n,m} - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

För varje n finns N_2 sådan att

$$m \geq N_2 \quad \Rightarrow \quad |b_n - a_{n,m}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Här beror N_2 på både ϵ och n. För varje $n \geq N_1$ välj m större än både N_1 och N_2 Då gäller

$$n \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad |b_n - a| < \epsilon$$

vilket ger $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

□

Omvändningen till observationen ovan gäller inte. Betrakta t ex

$$a_{n,m} = \frac{nm}{n^2 + m^2}.$$

Det gäller då att

$$\lim_{m\to\infty} a_{n,m} = 0 \ \text{ alla } n$$

men att

$$a_{n,n} = \frac{1}{2}, \ \text{ alla } n.$$

Följande resultat gäller.

Sats 6.8. *Sätt*

$$s_m(n) = a_{n,m}, \ \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

för $m = 1, 2, 3, \ldots$. *Antag att* $s_m \to s$ **likformigt**[1] *på mängden* $\{1, 2, 3, \ldots\}$, *där*

$$s(n) = \lim_{m\to\infty} s_m(n).$$

Då gäller:
$\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} a_{n,m}) = a \Rightarrow \lim_{n,m\to\infty} a_{n,m}$ *existerar och är lika med* a.

[1] $\sup_{n=1,2,3,\ldots} |s(n) - s_m(n)| \to 0$, $m \to \infty$

Bevis: Fixera godtyckligt $\epsilon > 0$. Finns N_1 sådan att

$$m \geq N_1 \quad \Rightarrow \quad |a_{n,m} - s(n)| < \frac{\epsilon}{2} \ \textbf{alla}\ n.$$

Då $a = \lim_{n\to\infty} s(n)$ finns N_2 sådan att

$$n \geq N_2 \quad \Rightarrow \quad |s(n) - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

För N större än N_1 och N_2 gäller

$$n, m \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_{n,m} - a| < \epsilon$$

vilket ger $\lim_{n,m\to\infty} a_{n,m} = a$.

$\square$

7 Vecka 7

Vad gicks igenom vecka 7? Formulering och bevis av Weierstrass M-sats samt tillämpning på exempel och potensserier. Repetition av begreppen addition, multiplikation med skalär, skalärprodukt, belopp och egenskaper för dessa för vektorrummen $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Definition och flertal exempel rörande gränsvärden för vektorvärda funktioner av flera variabler, polära/sfäriska koordinater samt kort om räkneregler för gränsvärden. Något om kontinuitet för funktioner av flera variabler samt de tre satser i PB2 som handlar om egenskaper för kontinuerliga funktioner på kompakta mängder eller bågvis sammanhängande mängder.

Kommentarer till beviset för termvis integrering/termvis derivering av potensserier: Betrakta $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med konvergensradien $R > 0$. Låt $f(x)$ beteckna potensseriens summa för $x \in (-R, R)$. Vi noterar att

1. $f \in C((-R, R))$ eftersom $f \in C([-r, r])$ för varje $r \in (0, R)$ enligt Sats 1 (funktionsserieversionen) och Sats 19.15 i [ELW]. Detta ger att $\int_o^x f(t)\, dt$ Riemannintegrerbar för varje $|x| < R$.

2. $\int_o^x f(t)\, dt = \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ för alla $|x| < R$ enligt Sats 2 (funktionsserieversionen) och Sats 19.15 i [ELW]. Av detta följer att potensserien $\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ har en konvergensradie $\geq R$. För att visa att potensserien är R visas att $\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ divergerar för varje $|x_0| > R$. Detta visas med ett motsägelseargument. Antag att $\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x_0^{n+1}$ konvergerar något ett $|x_0| > R$. Då gäller $\frac{a_n}{n+1} x_0^{n+1} \to 0$, $n \to \infty$. Finns N sådant att $|\frac{a_n}{n+1} x_0^{n+1}| \leq 1$ för alla $n \geq N$. För $R < |x| < |x_0|$ gäller då

$$|a_n x^n| = |\frac{a_n}{n+1} x_0^{n+1}| \cdot |\frac{x}{x_0}|^n \cdot \frac{n+1}{x_0} \leq \frac{n+1}{x_0} \cdot |\frac{x}{x_0}|^n \equiv b_n.$$

för $n \geq N$. Eftersom $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = |\frac{x}{x_0}| < 1$ ger kvotkriteriet för positiva serier att $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ är absolutkonvergent för $R < |x| < |x_0|$ vilket motsäger definitionen av R.

3. Ovan visades att om potensserien $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ och dess termvis integrerade potensserie $\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ har samma konvergensradie. Vi tillämpar nu detta resonemang på potensserien $\Sigma_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ och dess termvis integrerade potensserie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Vi vet att den senare potensserien har konvergensradien $R > 0$. Först visas att den första potensserien har en positiv konvergensradie $\tilde{R}$. Fixera $x_1 \in (0, \min\{1, R\})$. Då gäller $a_n x_1^n \to 0$, $n \to \infty$. För $x \in (0, x_1^2)$ gäller

$$|n a_n x^{n-1}| = |a_n x_1^n| \cdot |n x_1^{n-2}| \cdot |\frac{x}{x_1^2}|^{n-1} \leq M |\frac{x}{x_1^2}|^{n-1} \quad \text{alla } n$$

för något $M > 0$. Alltså är $\Sigma_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ absolutkonvergent och $\tilde{R} > 0$ enligt satsen om potensseriers konvergens. Då de två potensserierna $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ respektive $\Sigma_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ har samma konvergensradie följer att $\tilde{R} = R$.

4. Ett kortare argument för att de tre potensserierna $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ och $\Sigma_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ har samma konvergensradie är följande: Vi vet att

$$\hat{R} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}}$$

med lämpliga tolkningar i fallen då nämnaren är 0 respektive ∞. Här betecknar $\hat{R}$ konvergensradien för potensserien $\Sigma_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Då $R > 0$ följer att $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n=0}^{\infty}$ är en begränsad följd. Detta ger

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = H \in [0, \infty).$$

Eftersom $x \Sigma_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \Sigma_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ följer att $\Sigma_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ och $\Sigma_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ har samma konvergensradie och då

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n a_n|} = \limsup_{n\to\infty} (\underbrace{n^{\frac{1}{n}}}_{\to 1,\, n\to\infty} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}) = H$$

följer att båda har konvergensradien R. På samma sätt följer av att $\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = x \Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$ att $\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ och $\Sigma_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$ har samma konvergensradie. Denna är R då

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{a_n}{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty} (\underbrace{(\frac{1}{n+1})^{\frac{1}{n}}}_{\to 1,\, n\to\infty} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}) = H.$$

7.1 Olika konvergensbegrepp för funktionsserier

För funktioner $f_k : I \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ har vi talat om olika konvergenser för funktionsserien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

nämligen

1. $\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar punktvis på I
2. $\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt på I
3. $\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ punktvis absolutkonvergent på I

Vi noterar direkt implikationerna $2 \Rightarrow 1$ och $3 \Rightarrow 1$ samt att $1 \not\Rightarrow 2$ och $1 \not\Rightarrow 3$.

Vidare observerar vi att
$3 \not\Rightarrow 2$: Tag t ex $f_k(x) = x^k$ där $I = [0, 1)$. Då följer att $\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ är punktvis absolutkonvergent på I men inte likformigt konvergent på I. Notera att med standardbeteckningar gäller

$$s_n(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x},\ s(x) = \frac{x}{1 - x}$$

och $\sup_{x \in I} |s(x) - s_n(x)| = \infty \not\to 0$, $n \to \infty$. Men man kan notera att $\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergerar likformigt på $[0, r]$ för varje $0 < r < 1$.
$2 \not\Rightarrow 3$: Tag t ex $f_k(x) = (-1)^k \frac{x^k}{k}$ där $I = [0, 1]$. Då gäller att $\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ inte är punktvis absolutkonvergent på I. Men, återigen med standardbeteckningar, gäller

$$\sup_{x \in I} |s(x) - s_n(x)| \le \frac{1}{n+1} \to 0,\ n \to \infty.$$

Jämför beviset av Leibniz konvergenskriterium. Vi noterar att funktionsserien har egenskapen 2 men att detta inte kan visas med Weierstrass M-sats.

7.2 Ett tentamensproblem

På omtentan på kursen i augusti 2008 fannns ett problem där man skulle avgöra om en viss funktionsserie var likformigt konvergent på $\mathbb{R}$. Då lösningar inte är utlagda för den tentan ges en lösning här.

Problem: Visa att

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + k^2}$$

är punktvis konvergent på $\mathbb{R}$. Avgör om funktionsserien konvergerar likformigt på $\mathbb{R}$.

Lösning: Sätt $f_k(x) = \frac{x}{x^2+k^2}$. Då $|f_k(x)| \le \frac{|x|}{k^2}$ för $k = 1, 2, \ldots$ och $\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergerar så konvergerar, enligt jämförelsekriteriet, funktionsserien $\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ punktvis på $\mathbb{R}$. Kalla seriens summa $s(x)$. Vi noterar att s(x) är en udda funktion då funftionerna $f_k(x)$ är udda. Vidare är $f_k(x) \geq 0$ då $x \geq 0$ för $k = 1, 2, \ldots$ Via teckenstudium av derivatan av $f_k(x)$ får vi att funktionen $f_k(x)$ är växande på $[0, k]$, avtagande på $[k, \infty)$ och tar värdet $\frac{1}{2k}$ för $x = k$. Vi observerar (t.ex.) också att

$$f_l(k) \geq \frac{1}{5k}, \quad l = k, k+1, k+2, \ldots, 2k.$$

Detta ger att

$$\Sigma_{l=k+1}^{2k} f_l(k) \geq k \cdot \frac{1}{5k} = \frac{1}{5}$$

för $k = 1, 2, \ldots$. Alltså kan **inte** funktionsserien vara likformigt konvergent på $\mathbb{R}$ eftersom

$$s(n) - s_n(n) \geq \Sigma_{l=n+1}^{2n} f_l(n) \geq \frac{1}{5}$$

för varje positivt heltal n, där $s_n(x)$ betecknar den n-te partialsumman av $\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+k^2}$. Vi har alltså att

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |s(x) - s_n(x)| \not\to 0, \quad n \to \infty.$$

(Man kan notera att funktionsserien är likformigt konvergent på varje begränsat interval enligt Weierstrass M-sats.)

7.3 Observation om likformig konvergens

Allmänt gäller att om en funktionsföljd/funktionsserie konvergerar likformigt på en mängd D så konvergerar den likformigt på varje delmängd $\tilde{D} \subset D$, och om konvergensen är likformig på på varje mängd D_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, så är konvergensen likformig på mängderna $\bigcup_{n=1}^{N} D_n$, $N = 1, 2, 3, \ldots$, men inte nödvändigtvis på $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Visa detta.

7.4 Karakterisering av kompakta mängder i $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Nedan ges en ekvivalent beskrivning av kompakthet för mängder M i $\mathbb{R}^n$ i termer av egenskaper för följder av element i M. Vi studerar först fallet med $n = 1$. Följande resultat är användbart.

Sats 7.1. *Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en godtycklig talföljd av reella tal. Då finns en delföljd $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ av $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ som är monoton.*

Bevis: En monoton talföljd är en följd som är antingen avtagande eller växande. Låt oss först införa begreppet vändpunkt nedåt. Vi säger att a_{n_0} är en vändpunkt nedåt för följden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ om $a_m \leq a_{n_0}$ för alla $m > n_0$. Två fall kan förekomma.
Fall 1: Det finns oändligt många vändpunkter nedåt. Beteckna dessa med

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$$

där $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$. Följden $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ är avtagande då

$$a_{n_1} \geq a_{n_2} \geq \ldots \geq a_{n_k} \geq \ldots.$$

Fall 2: Det finns inga eller högst ändligt många vändpunkter nedåt. Välj ett element a_{m_1} sådant att det inte finns några vändpunkter a_n nedåt med $n \geq m_1$. Välj sedan ett element a_{m_2} med $m_2 > m_1$ och $a_{m_2} \geq a_{m_1}$. Ett sådant element måste existera då det inte finns vändpunkter nedåt med index större än eller lika med m_1. Fortsätt iduktivt att välja element så att $a_{m_{k+1}} \geq a_{m_k}$. Detta ger en följd $(a_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ där

$$a_{m_1} \leq a_{m_2} \leq \ldots \leq a_{m_k} \leq \ldots.$$

Följden är alltså växande och påståendet i satsen är visat.

□

Vi kan nu visa följande resultat baserat på supremumaxiomet. Beviset är rättframt och utelämnas här.

Sats 7.2. *Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en godtycklig växande talföljd. Då gäller: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är uppåt begränsad om och endast om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent.*

På samma sätt visas också

Sats 7.3. *Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en godtycklig avtagande talföljd. Då gäller: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är nedåt begränsad om och endast om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent.*

Vi kan nu formulera och bevisa

Sats 7.4 (Karakterisering av kompakta delmängder av $\mathbb{R}$)**.** *Låt K vara en delmängd av $\mathbb{R}$. Då är K kompakt om och endast om för varje följd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sådan att $a_n \in K$ för alla n det finns en delföljd $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ och ett tal $a \in K$ så att $a_{n_k} \to a$ då $k \to \infty$.*

Bevis: Antag först att K är en kompakt, dvs sluten och begränsad, delmängd av $\mathbb{R}$ och låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en följd sådan att $a_n \in K$ för alla n. Då finns en monoton delföljd $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ av $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ enligt Sats 6.1. Då K är en begränsad mängd är $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ en begränsad följd. Enligt Sats 6.2 och Sats 6.3 måste $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ vara konvergent. Låt a beckna gränsvärdet av följden. Då varje $a_{n_k} \in K$, $k = 1, 2, \ldots$, måste $a \in K \bigcup \partial K$. Men K är sluten så $\partial K \subset K$ och alltså gäller $a \in K$.

Vi antar nu att för varje följd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sådan att $a_n \in K$ för alla n finns en delföljd $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ och ett tal $a \in K$ så att $a_{n_k} \to a$ då $k \to \infty$. Vi ska visa att K då måste vara sluten och begränsad.
K är begränsad: Antag att K inte är begränsad och visa att detta motsäger vårt antagande ovan. Eftersom K är obegränsad finns för varje reellt tal M ett element $a \in K$ sådant att $|a| \geq M$. Välj ett godtyckligt element i K och kalla det a_1. Välj $a_2 \in K$ så att $|a_2| \geq |a_1| + 1$. Välj induktivt a_{n+1} så att $|a_{n+1}| \geq |a_n| + 1$ för $n = 1, 2, \ldots$ Följden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kan inte ha en konvergent delföljd ty om den hade det skulle denna delföljd vara begränsad samtidigt som det gäller att $|a_n| \to \infty$ då $n \to \infty$. Motsägelse och alltså är K begränsad.

K är sluten: Antag att K inte är sluten och visa att detta motsäger vårt antagande ovan. Om K inte är sluten finns en randpunkt a till K som inte tillhör K. Välj för varje positivt heltal n ett element i $K \bigcap B(a, \frac{1}{n})$. Kalla detta a_n. Notera att $K \bigcap B(a, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$ för alla n eftersom a är en randpunkt till K. Följden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ligger i K och konvergerar mot gränsvärdet a eftersom $|a_n - a| \leq \frac{1}{n}$ för alla n. Detta ger en motsägelse. Alltså måste K vara sluten. Beviset av satsen är nu klart.

$\square$

Sats 7.4 kan nu generaliseras till godtyckligt $\mathbb{R}^n$. Vi har

Sats 7.5 (Karakterisering av kompakta delmängder av $\mathbb{R}^n$)**.** *Låt K vara en delmängd av $\mathbb{R}^n$. Då är K kompakt om och endast om för varje följd $(\mathbb{a}_k)_{k=1}^{\infty}$ sådan att $\mathbb{a}_k \in K$ för alla k finns en delföljd $(\mathbb{a}_{k_l})_{l=1}^{\infty}$ och ett tal $\mathbb{a} \in K$ så att $\mathbb{a}_{k_l} \to \mathbb{a}$ då $l \to \infty$.*

Beviside: Andra delen av beviset av Sats 7.4 går igenom i fallet $\mathbb{R}^n$ med $n > 1$ varför vi endast behandlar första delen av beviset. Låt alltså K vara en sluten och begränsad delmängd i $\mathbb{R}^n$ och låt $(\mathbb{a}_k)_{k=1}^{\infty}$ vara en godtycklig följd i K. Vi har

$$\mathbb{a}_k = (a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Eftersom K är en begränsad mängd gäller att det finns ett reellt tal M sådant att $|\mathbb{a}_k| \leq M$ för $k = 1, 2, \ldots$. Då gäller

$$|a_{k,1}| \leq |\mathbb{a}_k| \leq M, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Eftersom följden $(a_{k,1})_{k=1}^{\infty}$ är begränsad finns enligt Sats 6.1, Sats 6.2 och Sats 6.3 en konvergent delföljd, beteckna den $(a_{k,1}^{(1)})_{k=1}^{\infty}$, av $(a_{k,1})_{k=1}^{\infty}$. Betrakta nu delföljden $(\mathbb{a}_k^{(1)})_{k=1}^{\infty}$ av $(\mathbb{a}_k)_{k=1}^{\infty}$. Vi har

$$\mathbb{a}_k^{(1)} = (a_{k,1}^{(1)}, a_{k,2}^{(1)}, \ldots, a_{k,n}^{(1)}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$|a_{k,2}^{(1)}| \leq |\mathbb{a}_k^{(1)}| \leq M, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

där det enligt satserna ovan gäller att följden $(a_{k,2}^{(1)})_{k=1}^{\infty}$ har en konvergent delföljd som vi betecknar $(a_{k,2}^{(2)})_{k=1}^{\infty}$. Fortsätt induktivt att betrakta följden på koordinatplats $l+1$ för följden $(\mathbb{a}_k^{(l)})_{k=1}^{\infty}$, där

$$\mathbb{a}_k^{(l)} = (a_{k,1}^{(l)}, a_{k,2}^{(l)}, \ldots, a_{k,n}^{(l)}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

och välj ut en delföljd för vilken de reella talen på plats $l+1$ konvergerar. Efter ett ändligt antal utgallringar (tagande av delföljder av delföljder) har vi fått en delföljd $(\mathbb{a}_k^{(n)})_{k=1}^{\infty}$ av $(\mathbb{a}_k)_{k=1}^{\infty}$ för vilka de reella talen på samtliga koordinatplatser konvergerar. Det som återstår är att visa att $(a_k^{(n)})_{k=1}^{\infty}$ konvergerar mot ett elenent i K.

Läsaren uppmanas att använda karakteriseringen av kompakthet ovan för att visa Satserna 4 och 5 på sidan 41 i PB2 samt även följande resultat.

Sats 7.6. *Låt $\mathbb{f} : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^p$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, vara en kontinuerlig funktion, där $\mathbb{D}$ är en kompakt mängd. Då är*

$$\mathbb{f}(\mathbb{D}) = \{\mathbb{f}(\mathbb{x}) : \mathbb{x} \in \mathbb{D}\}$$

en kompakt mängd i $\mathbb{R}^p$.

7.5 Likformig kontinuitet

Tyvärr hann jag inte säga så mycket om likformig kontinuitet men låt mig helt kort ge några kommentarer här.

Låt $\mathbb{f} : D \to \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^n$, vara en vektorvärd funktion på D. Här betecknar n, p godtyckliga positiva heltal. Vi säger att

$\mathbb{f}$ **är kontinuerlig på D** om det för alla $\mathbb{x} \in D$ och alla $\epsilon > 0$ finns $\delta > 0$ så att

$$|\mathbb{x} - \mathbb{y}| < \delta,\ \mathbb{y} \in D \Rightarrow |\mathbb{f}(\mathbb{x}) - \mathbb{f}(\mathbb{y})| < \epsilon.$$

(Observera att här får δ bero på både ϵ och $\mathbb{x}$)

$\mathbb{f}$ **är likformigt kontinuerlig på D** om det för alla $\epsilon > 0$ finns $\delta > 0$ så att

$$|\mathbb{x} - \mathbb{y}| < \delta,\ \mathbb{x}, \mathbb{y} \in D \Rightarrow |\mathbb{f}(\mathbb{x}) - \mathbb{f}(\mathbb{y})| < \epsilon.$$

(Observera att här få δ bara bero på ϵ)

Man noterar att en likformigt kontinuerlig funktion på D måste vara en kontinuerlig funktion på D men inte omvänt. Vi ger några exempel på dessa begrepp för reella funktioner, dvs $n = p = 1$.

Ex: $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$ är en funktion som är likformigt kontinuerlig på [0,1]. Visa detta.

Ex: $f(x) = x^2$, $x \in [1, \infty)$ är en funktion som är kontinuerlig på $[1, \infty)$ men inte likformigt kontinuerlig på $[1, \infty)$. Visa detta.

Ex: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$ är kontinuerlig men inte likformigt kontinuerlig på $(0, 1]$. Visa också detta.

Ex: En funktion som är likformigt kontinuerlig på en mängd är likformigt kontinuerlig på varje delmängd av denna. En funktion som är likformigt kontinuerlig på en uppräknelig mängd av mängder (i $\mathbb{R}^n$, t ex $n = 1$) är likformigt kontinuerlig på varje ändlig union av dessa mängder men inte nödvändigtvis likformigt kontinuerlig på unionen av alla de uppräkneligt många mängderna. Jämför de två första exemplen ovan.

Ex: Antag att $I(= [a,b])$ är ett slutet begränsat intervall och att $f(x)$ är en deriverbar funktion på (a,b). Då gäller att om

$$\sup_{x\in(a,b)} |f'(x)| < \infty$$

så är f likformigt kontinuerlig på I, vilket lätt visas med hjälp av medelvärdessatsen (modell Lagrange).

Ex: Funktionen $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ är likformigt kontinuerlig på $[0,1]$. Detta följer direkt från Sats 5 i PB2. Notera här att

$$\sup_{x\in(0,1)} |f'(x)| = \infty$$

så observationen i föregående exempel kan inte användas. Vi kan däremot visa den likformiga kontinuiteten utgående från definitionen.

Antag att $\delta > 0$ och $0 \le x < x+\delta \le 1$. För $y = x+\delta$ gäller

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}|x-y| = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\delta}}\delta \le \sqrt{\delta}.$$

Fixera nu ett godtyckligt $\epsilon > 0$. Då gäller med $\delta = \epsilon^2$ att

$$|x-y| < \delta,\ x,y \in [0,1] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Likformiga kontinuiteten visad.

Tack för trevligt deltagande

Peter