Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola

Skissartade lösningsförslag till tentamen TMA976

Datum: 2015–01–14

1. Lös differentialekvationen
$$\begin{cases} y'' - y = e^x(x + e^{-x}) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

Lösning:

Differentialekvationen
$$(D^2 - 1)[y(x)] = e^x(x + e^{-x})$$
är linjär av andra ordningen med konstanta koefficienter och inhomogen. Det karakteristiska polynomet är
$$r^2 - 1 = (r - 1)(r + 1).$$
Detta ger att den allmänna homogenlösningen kan skrivas på formen
$$y_h(x) = Ae^x + Be^{-x}.$$
En partikulärlösning ges av
$$y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x),$$
där $(D^2 - 1)[y_{p,1}(x)] = xe^x$ och $(D^2 - 1)[y_{p,2}(x)] = 1$.
Ansättningen $y_{p,1}(x) = e^x v(x)$ ger med förskjutningsregeln att $D(D+2)[v(x)] = x$ vilket med $v(x) = (a+bx)x = ax+bx^2$ efter insättning i differentialekvationen $v''(x)+2v'(x) = x$ ger $a = -b = -\frac{1}{4}$. Ansättningen $y_{p,2}(x) = c$ ger $c = -1$. Vi får alltså
$$y_p(x) = -1 + (\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x)e^x.$$
Allmänna lösningen $y(x)$ till den ursprungliga differentialekvationen ges av
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (A - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2)e^x + Be^{-x} - 1.$$
Begynnelsevillkoren bestämmer konstanterna A och B. Vi har
$$1 = y(0) = A + B - 1$$

och

$$0 = y'(0) = A - \frac{1}{4} - B.$$

Detta ger $A = \frac{9}{8}$ och $B = \frac{7}{8}$.

Svar: $y(x) = (\frac{9}{8} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2)e^x + \frac{7}{8}e^{-x} - 1$

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = (x+y)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

t. ex. genom att införa en ny variabel $z(x) = x + y(x)$.

(6p)

Lösning:

Efter variabelbytet $z(x) = x + y(x)$ fås den separabla differentialekvationen

$$z' = 1 + z^2.$$

Detta ges oss

$$\arctan(z(x)) = x + C$$

och härur

$$z(x) = \tan(x + C).$$

Villkoret $y(0) = 1$ medför att $1 = z(0) = \tan C$ och med $C = \frac{\pi}{4}$ fås

Svar: $y(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4}) - x, \;\; x \in (-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

3. Beräkna

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x) - x \cdot \sqrt[3]{1 - x^2}}{x^5}.$$

(6p)

Lösning:

Standardutvecklingarna

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7), \; x \to 0$$

och

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3} \cdot (-\frac{2}{3})}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^3), \; x \to 0$$

ger oss

$$\sin(\sin x) - x \cdot \sqrt[3]{1 - x^2} = \sin(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathcal{O}(x^7)) - x(1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + \mathcal{O}(x^6)) =$$

$$= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}) - \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6})^3 + \frac{1}{120}x^5 - (x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^5) + \mathcal{O}(x^7) =$$
$$= \ldots = \frac{19}{90}x^5 + \mathcal{O}(x^7).$$

Härur följer

Svar: $\frac{19}{90}$

4. För vilka reella tal x är serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}(\sqrt[k]{k} - 1)(\frac{x}{2})^k$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent?

(6p)

Lösning: Sätt

$$a_k = (\sqrt[k]{k} - 1)\frac{1}{2^k}, \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

Vi observerar att

$$\sqrt[k]{k} - 1 = e^{\frac{\ln k}{k}} - 1 = \frac{\ln k}{k} - \mathcal{O}((\frac{\ln k}{k})^2)$$

eftersom

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k} = 0$$

och

$$e^t = 1 + t + \mathcal{O}(t^2), \; t \to 0.$$

Detta medför att

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2}$$

och vi får att konvergensradien R för potensserien är 2. Av detta följer att potensserien är absolutkonvergent för $|x| < 2$ och divergent för $|x| > 2$. Återstår att studera fallen $x = \pm 2$.

$\boxed{\text{x=2}}$: Serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}(\sqrt[k]{k} - 1)$$

är divergent enligt jämförelsekriteriet då $\Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k}$ divergerar eftersom $\Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergerar.

$\boxed{\text{x=-2}}$: Serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\sqrt[k]{k} - 1)$$

är alternerande och $0 \leq b_k \to 0$ då $k \to \infty$ där $b_k = \sqrt[k]{k} - 1$ Om följden $(b_k)_{k=l}^{\infty}$ är avtagande för något positivt heltal l följer från Leibniz konvergenskriterium att serien är konvergent. Notera att för positivt heltal k gäller

$$\sqrt[k]{k} - 1 \geq \sqrt[k+1]{k+1} - 1 \quad \Leftrightarrow k^{\frac{1}{k}} \geq (k+1)^{\frac{1}{k+1}}$$

$$\Leftrightarrow k^{k+1} \geq (k+1)^k \quad \Leftrightarrow k \geq (1+\frac{1}{k})^k.$$

Då $\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k})^k = e$ är den sökta avtagandeegenskapen för b_k-följden visad och potensserien konvergerar för $x = -2$ men ej absolutkonvergent där då potensserien divergerar för $x = 2$. Detta ger oss

Svar: Absolutkonvergens för $x \in (-2, 2)$, betingad konvergens för $x = -2$ och divergens för $x \in (-\infty, -2) \bigcup [2, \infty)$

5. För vilka reella tal a konvergerar serien

$$\Sigma_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k-2}}{k^a} \quad ?$$

(6p)

Lösning:

Efter omskrivningen

$$\frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k-2}}{k^a} = \frac{4}{k^a(\sqrt{k+2} + \sqrt{k-2})}$$

och utnyttjande av standardutvecklingen

$$\sqrt{1+x} = 1 + \mathcal{O}(x), \quad x \to 0$$

får vi

$$\frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k-2}}{k^a} = \frac{1}{k^{a+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{4}{2 + \mathcal{O}(k^{-\frac{1}{2}})}.$$

Dessutom vet vi att

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \text{ konvergerar } \quad \Leftrightarrow \quad p > 1.$$

Av detta följer enligt jämförelsesatsen för positiva serier att den ursprungliga serien konvergerar om och endast om $a + \frac{1}{2} > 1$, dvs $a > \frac{1}{2}$.

Svar: $a > \frac{1}{2}$

6. Avgör om funktionsserien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}$$

är likformigt konvergent på $[0, 1]$.

(5p)

Lösning:

Vi ser att funktionsserien konvergerar punktvis på $[0,1]$ då den är absolutkonvergent för varje $x \in [0,1)$ och konvergent i $x = 1$ enligt Leibniz konvergenskriterium. Dock kan man inte använda Weierstrass M-sats då serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \max_{x\in[0,1]} |(-1)^k \frac{x^k}{k}| = \Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

är divergent. Men eftersom $(\frac{1}{k})_{k=1}^{\infty}$ är en avtagande följd som konvergerar mot 0 gäller för varje $x \in [0,1]$ och positivt heltal n att

$$|\Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k} - \Sigma_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{x^k}{k}| \le |(-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1}| \le \frac{1}{n+1}$$

där $\frac{1}{n+1} \to 0$ då $n \to \infty$. Alltså konvergerar funktionsserien likformigt på $[0,1]$.

Svar: Funktionsserien konvergerar likformigt på $[0,1]$.

7. Formulera och bevisa Leibniz konvergenskriterium.

(6p)

Lösning: Se ELW.

8. Bevisa följande påståenden:

   (a) Antag att

      i. $f : [-1,1] \to [-1,1]$ samt att

      ii. f är Lipschitzkontinuerlig med Lipschitskonstanten $k < 1$, dvs

      $$|f(x) - f(y)| \le k|x-y| \quad \text{alla } x, y \in [-1,1].$$

   Visa att

      i. det finns ett entydigt bestämt $\alpha \in [-1,1]$ sådant att

      $$f(\alpha) = \alpha,$$

      ii. för varje $x_0 \in [-1,1]$ gäller att följden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, där $x_{n+1} = f(x_n)$ för $n = 0,1,2,\ldots$, konvergerar mot fixpunkten α för f.

   (b) Antag att

      i. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ samt att

      ii. f är Lipschitzkontinuerlig med Lipschitskonstanten $k < 1$, dvs

      $$|f(x) - f(y)| \le k|x-y| \quad \text{alla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Visa att

i. det finns ett entydigt bestämt $\alpha \in \mathbb{R}$ sådant att

$$f(\alpha) = \alpha,$$

ii. för varje $x_0 \in \mathbb{R}$ gäller att följden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, där $x_{n+1} = f(x_n)$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$, konvergerar mot fixpunkten α för f.

(4+4p)

Lösning:

(a) Se INR. Specialfall av fixpunktssatsen med $a = -1$ och $b = 1$.

(b) Från kontraktionsvillkoret

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \text{alla } \; x, y \in \mathbb{R}$$

med $y = 0$ följer att

$$f(0) - k|x| \leq f(x) \leq f(0) + k|x| \quad \text{alla } \; x \in \mathbb{R}.$$

Vi observerar att det finns $R > 0$ så att

$$f : [-R, R] \to [-R, R]$$

nämligen om $|f(0)| \leq R(1 - k)$. Fixera ett sådant R. Det gäller att

$$x > R \Rightarrow x - f(x) \geq (1 - k)x - f(0) \geq (1 - k)(x - R) > 0$$

och

$$x < -R \Rightarrow x - f(x) \leq (1 - k)x - f(0) \leq (1 - k)(x + R) < 0.$$

Av detta och fixpunktssatsen i INR tillämpad på f på intervallet $[-R, R]$ följer första delen av påståendet. Det andra påståendet i uppgiften följer av fixpunktssatsen tillämpad på f på intervallet $[-\tilde{R}, \tilde{R}]$ med $\tilde{R} = \max\{R, |x_0|\}$. Vi noterar att det gäller att

$$f : [-\tilde{R}, \tilde{R}] \to [-\tilde{R}, \tilde{R}] \quad \text{alla } \; \tilde{R} \geq R.$$