Lösningsskisser TMA976 den 20/8 2015

① $\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 8e^{2x}\sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$

Lösning. Kar. pol $r^2 - 4r + 5 = (r-2)^2 - i^2 =$

$= (r-2-i)(r-2+i)$ ger

$y_h(x) = A e^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x$

För att beräkna en $y_p(x)$ betrakta hjälpekv

$z'' - 4z' + 5z = 8e^{(2+i)x}$

Ansätt $z(x) = e^{(2+i)x}\cdot u(x)$ Förskjutningsregeln ger

$e^{(2+i)x}\,(D(D+2i))[u(x)] = 8e^{(2+i)x}$

dvs $D(D+2i)[u(x)] = 8$. Ansätt $u(x) = C\cdot x$

Alltså $2iC = 8$ dvs $C = -4i$

Detta ger oss $y_p(x) = \mathrm{Im}\left(e^{(2+i)x}\cdot(-4i)x\right) =$

$= -4xe^{2x}\cos x$ och

$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (A - 4x)e^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x$

Här gäller

$\begin{cases} 0 = y(0) = A \\ -3 = y'(0) = -4 + 2A + B \end{cases}$ dvs $\begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \end{cases}$

Svar: $y(x) = e^{2x}(\sin x - 4x\cos x)$.

② $\begin{cases} (1+x)f' = f + f^2 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

[alt: Sätt $z(x) = \frac{1}{f(x)}$ Bernoullis diff. ekv]

Bestäm $f(\frac{1}{2})$

Lösning: Separabel diff-ekv. För $f \neq 0, -1$, $x \neq -1$

gäller $\frac{1}{f(f+1)}f' = \frac{1}{x+1}$. obs: $f \equiv 0, -1$ ger två

lösningar som dock ej uppfyller $f(0) = 1$.

$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln(x+1)$ för $x > -1$

$\int \frac{1}{f(f+1)}\,df = \int\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f+1}\right)df = \ln f - \ln(f+1)$ för $f > 0$

Alltså $\ln\left(\frac{f(x)}{f(x)+1}\right) = \ln(x+1) + \ln c \quad , c>0$

dvs $\frac{f(x)}{f(x)+1} = c(x+1)$.

Villkoret $f(0)=1$ ger $c=\frac{1}{2}$. Vi har

$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)(f(x)+1)$ dvs $f(x) = \frac{\frac{1}{2}(x+1)}{1-\frac{1}{2}(x+1)} = \frac{1+x}{1-x}$

för $x \in (-1,1)$. Detta ger $f(\frac{1}{2}) = 3$

Svar: 3

(3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+a}{x^2} - \frac{b}{x\ln(1+x)}\right)$ existerar. Bestäm a, b och gränsvärdet

Lösning: $\frac{e^x+a}{x^2} - \frac{b}{x\cdot\ln(1+x)} = \frac{(e^x+a)\ln(1+x) - bx}{x^2\ln(1+x)} =$

$= \left\{ e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+O(x^4),\ \ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+O(x^4)\right\} =$

$= \frac{(1+a+x+\frac{x^2}{2}+O(x^3))(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+O(x^4)) - bx}{x^3+O(x^4)} =$

$= \frac{(1+a-b)x + (1-\frac{1}{2}(1+a))x^2 + (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(1+a))x^3 + O(x^4)}{x^3+O(x^4)}$

Gränsvärdet existerar $\Rightarrow$ $1+a-b=0$, $\frac{1}{2}-\frac{a}{2}=0$ dvs

$a=1$, $b=2$.

Gränsvärdet $= \frac{1}{3}(1+1) = \frac{2}{3}$.

Svar: $a=1$, $b=2$, gr.v $= \frac{2}{3}$

(4) a) Ge exempel på potensserie med konv.intervallet $(-2,2]$

Exempel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^n$

Visa att konvergensintervallet $= (-2,2]$ (Lätt att visa!)

b) För vilka $x\in\mathbb{R}$ konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{x}{n})^{n^2}\cdot|x|^n$?

Lösning: För $n>|x|$ är $(1+\frac{x}{n})^{n^2}\cdot|x|^n \geq 0$

Rotkriteriet ger att serien konvergerar för $x\in\mathbb{R}$ sådana att $e^x|x|<1$ och divergerar för $x\in\mathbb{R}$ sådana att $e^x|x|>1$. Vi noterar att för $x<0$ gäller $|x|<e^{|x|}$ och alltså $e^x|x|<1$ för $x<0$.

För $x\geq 0$ noterar vi att $f(x) = xe^x$ är strängt växande, då $f'(x) = e^x + xe^x > 0$, $x \geq 0$, och $f(x) = xe^x \to \infty$, $x \to \infty$. Alltså finns entydigt bestämt $x_0 > 0$ så att $x_0 e^{x_0} = 1$. Serien konvergerar för $x < x_0$ och divergerar för $x > x_0$.

Fallet $x = x_0$: Vi noterar att $0 < x_0 = -\ln x_0$ och

$$\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^{n^2} \cdot x_0^n = e^{n^2 \ln\left(1+\frac{x_0}{n}\right) + n \ln x_0} =$$

$$= e^{n^2\left(\frac{x_0}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{n}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - nx_0} = e^{-\frac{x_0^2}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)} \to e^{-\frac{x_0^2}{2}}, \quad n \to \infty$$

Alltså divergerar serien då $\left(1+\frac{x_0}{n}\right)^{n^2} \cdot x_0^n \not\to 0, n \to \infty$

Svar: Serien konvergerar för $x < x_0$ och divergerar för $x \geq x_0$, där x_0 bestäms av $x_0 \cdot e^{x_0} = 1$

(5) Avgör om serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ konvergerar där

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{om decimalutvecklingen av } n \text{ innehåller siffran 9} \\ 1 & \text{annars.} \end{cases}$$

Lösning. Fixera godtyckligt positivt heltal N. De heltal $n \in [10^N, 10^{N+1})$ är de som har decimalutvecklingar bestående av exakt N siffror där den första är en av siffrorna 1 till 9 och de övriga siffrorna är bland 0 till 9. Antalet $n \in [10^N, 10^{N+1})$ med $a_n = 1$ är enligt multiplikationsprincipen $8 \cdot 9^{N-1}$. Detta ger oss

$$\sum_{n=10^N}^{10^{N+1}-1} \frac{a_n}{n} \leq \frac{8 \cdot 9^{N-1}}{10^N} = \frac{4}{5}\left(\frac{9}{10}\right)^{N-1}$$

och följdaktligen

$$\sum_{n=10}^{10^{N+1}-1} \frac{a_n}{n} \leq \sum_{k=1}^{N+1} \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{9}{10}} = 8$$

Alltså bildar partialsummorna till den positiva serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ en (växande) uppåt begr. följd och alltså konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ enligt huvudsatsen för positiva serier.

Svar: Serien konvergerar

(6) $f_n(x) = nx e^{-nx^2}$, $x \in I = [0,1]$, $n = 1, 2, \ldots$

a) $(f_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ punktvis konvergent på I,
eftersom $f_n(0) = 0$ alla n och $0 \leq f_n(x) \to 0$, $n \to \infty$
för varje $x \in (0,1]$.

b) $(f_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ej likformigt konvergent på I,
eftersom $f = 0$ är den punktvisa gränsfunktionen
och $|f_n(x) - f(x)| = nx e^{-nx^2}$, $x \in I$. Då

$$\frac{d}{dx}\, nx e^{-nx^2} = n e^{-nx^2}\left[1 - 2nx^2\right]$$

fås $\max_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = nx e^{-nx^2}\Big|_{x = \frac{1}{\sqrt{2n}}} = \sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}} \not\to 0$
då $n \to \infty$. Alltså $(f_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ är
ej likformigt konvergent på I

c) finns ingen majorerande funktion $g : I \to [0,\infty)$.
(En majorerande funktion g ska per definition
uppfylla $|f_n(x)| \leq g(x)$, $x \in I$, alla n och $\int_I g(x)\,dx < \infty$)
Vi noterar att om en majorerande funktion fanns
skulle enligt satsen om dominerad konvergens
gälla att $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 0$.
Men

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 nx e^{-nx^2}\,dx = \int_0^{\sqrt{n}} y e^{-y^2}\,dy \to \int_0^{\infty} y e^{-y^2}\,dy =$$
$$= \frac{1}{2}, \quad n \to \infty.$$

[Alt: För fixt $x \in (0,1]$ noterar vi att

$$\frac{d}{dn} f_n(x) = x e^{-nx^2}\left[1 - nx^2\right]$$

vilket gör att en majorerande funktion $g(x)$ måste
uppfylla $g(x) \geq \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{e}$ för $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, \ldots$

.... (Notera $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \infty$)]

(7) + (8) Se textboken och INR