Lösningsförslag till tentamen TMA976, 2016-01-15

① Lös

$$\begin{cases} y'' + y = x^2 + (x+1)\cos x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Lösning:

Karakteristiska polynomet $r^2+1 = (r+i)(r-i)$ ger allmänna homogenlösningen $y_h(x) = A\cos x + B\sin x$

Partikulärlösningar: Ansätt

$y_{p,1}(x) = ax^2 + bx + c$ där $y_{p,1}'' + y_{p,1} = x^2$.

Derivering och insättning i diff-ekv ger

$$2a + ax^2 + bx + c = x^2.$$

Vi får $a = 1$, $b = 0$ och $c = -2$ dvs

$$y_{p,1}(x) = x^2 - 2$$

För högerledet $(x+1)\cos x$ i diff ekv, betrakta

$u'' + u = (x+1)e^{ix}$ vilket ger $y_{p,2} = \operatorname{Re} u$

som löser $y_{p,2}'' + y_{p,2} = (x+1)\cos x$.

Ansätt $u(x) = z(x)e^{ix}$ och använd förskjutningsregeln. Detta ger $e^{ix}(D+2i)D[z(x)] = (x+1)e^{ix}$,

dvs $z'' + 2iz' = x+1$. Ansätt $z(x) = (dx+e)x$.

Insättning i diff-ekv ger

$$2d + 2i(2dx + e) = x + 1$$

dvs $4di = 1$, $2d + 2ie = 1$.

Detta ger $d = -\frac{i}{4}$, $e = \frac{1}{4} - \frac{i}{2}$ och alltså

$$y_{p,2}(x) = \operatorname{Re}\left(\left(-\frac{i}{4}x^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{i}{2}\right)x\right)(\cos x + i\sin x)\right) =$$

$$= \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right)\sin x + \frac{x}{4}\cos x$$

Vi har lösningen $y = y_h + y_{p,1} + y_{p,2}$ till

$y'' + y = x^2 + (x+1)\cos x$. Återstår att bestämma konstanterna A och B i y.

$0 = y(0) = A - 2$ ger $A = 2$

$1 = y'(0) = B + \frac{1}{4}$ ger $B = \frac{3}{4}$

Svar: $y(x) = 2\cos x + \frac{3}{4}\sin x + x^2 - 2 + \frac{x}{4}\cos x + (\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2})\sin x$

(2) Lös

$$\begin{cases} y' = x\tan y \\ y(0) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Lösning:

$y' = x \cdot \frac{\sin y}{\cos y}$ är en separabel diff.ekv.

För $0 < y < \frac{\pi}{2}$ gäller $\frac{\cos y}{\sin y} y' = x$ vilket

ger $\ln(\sin(y(x))) = \frac{x^2}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$. Vi får

$\sin(y(x)) = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \tilde{C}$, $\tilde{C} > 0$

Villkoret $y(0) = \frac{\pi}{6}$ ger $\tilde{C} = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.

Alltså $y(x) = \arcsin(\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}})$ vilken är

definierad för $\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}} \leq 1$ dvs $|x| \leq \sqrt{\ln 4}$.

Svar: $y(x) = \arcsin(\frac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}})$, $|x| \leq \sqrt{\ln 4}$

Alt: I stället för

$\int \frac{\cos y}{\sin y}\,dy = \ln|\sin y| + C$

kan man göra kalkylen

$\int \frac{1}{\tan y}\,dy = \{t = \tan y\} = \int \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt = \ldots =$

$= \ln|t| - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + C = \ln\left|\frac{\tan y}{\sqrt{1+\tan^2 y}}\right| + C$

vilket ger $y(x) = \arctan\left(\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{4 - e^{x^2}}}\right)$

(3) Beräkna $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3}(1 - (\cos x)^{\sin x})$.

Lösning:

Vi noterar att $(\cos x)^{\sin x} = e^{\sin x \ln(\cos x)}$

standardutvecklingarna

$\sin t = t - O(t^3)$, $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^4)$, $t \to 0$

$\ln(1+t) = t + O(t^2)$, $e^t = 1 + t + O(t^2)$, $t \to 0$

Detta ger

$$(\cos x)^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)} = e^{(x+O(x^3))\ln(1-\frac{x^2}{2}+O(x^4))} =$$

$$= e^{(x+O(x^3))\cdot(-\frac{x^2}{2}+O(x^4))} = e^{-\frac{x^3}{2}+O(x^5)} = 1 - \frac{x^3}{2} + O(x^5).$$

Alltså $x^{-3}\cdot(1-(\cos x)^{\sin x}) = \frac{1}{2} + O(x^2) \to \frac{1}{2}$, $x \to 0$

Svar: $\frac{1}{2}$

(4) Avgör om $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k (\ln \ln k)^2}$ konvergerar

Lösning:

Sätt $f(x) = \frac{1}{x \ln x (\ln \ln x)^2}$ $x \geq 3$

Funktionen f är positiv och avtagande varför sökta serien konvergerar omm $\int_3^\infty f(x)\,dx$ konvergerar enligt integralkriteriet.

$$\int_3^R f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{\ln(\ln x)}\right]_3^R = \frac{1}{\ln \ln 3} - \frac{1}{\ln \ln R} \to$$

$$\to \frac{1}{\ln \ln 3}, \quad R \to \infty.$$

Alltså $\int_3^\infty f(x)\,dx$ konvergerar

Svar: Serien konvergerar

(5) Bestäm för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k 2^k \ln k}(x-2)^{2k}$ är absolut konvergent, betingat konvergent respektive divergent

Lösning:

Sätt $t = (x-2)^2$ och betrakta potensserien

(*) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k 2^k \ln k} t^k$ i variabeln t.

Sätt $a_k = \frac{1}{k 2^k \ln k}$ $k = 2, 3, \ldots$

Det gäller $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[k]{k \ln k}} \to \frac{1}{2}$, $k \to \infty$

Potensserien (*) har konvergensradien $R = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Det följer att (*) är absolut konvergent för $|t| < 2$ och divergent för $|t| > 2$. För $t = 2$ gäller

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k 2^k \ln k} \cdot 2^k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ vilket är en divergent serie (inses via $\int$-kriteriet)

Alltså $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k 2^k \ln k} (x-2)^2$ är

absolutkonvergent för $(x-2)^2 < 2$ dvs för $|x-2| < \sqrt{2}$, dvs $2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$,

divergent för $(x-2)^2 > 2$ och även för $(x-2)^2 = 2$ dvs $x \in (-\infty, 2-\sqrt{2}] \cup [2+\sqrt{2}, \infty)$.

Svar: absolutkonvergent för $x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$

divergent för $x \in (-\infty, 2-\sqrt{2}] \cup [2+\sqrt{2}, \infty)$.

6) $f_n(x) = (\cos x)^n$, $x \in [0,\pi]$, $n = 1, 2 \ldots$

a) Visa att $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar punktvis men inte likformigt på $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Lösning: Vi noterar att

$x \in (0, \frac{\pi}{2}]$: $f_n(x) \to 0$, $n \to \infty$

$x = 0$: $f_n(0) = 1 \to 1$, $n \to \infty$

sätt

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \in (0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Vi har $f_n \to f$ punktvis på $[0, \frac{\pi}{2}]$

Vidare $f_n \not\to f$ likformigt på $[0, \frac{\pi}{2}]$ då

$$\sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in (0, \frac{\pi}{2}]} f_n(x) = 1 \not\to 0, \ n \to \infty.$$

Alternativt noterar man att $f_n \in C([0, \frac{\pi}{2}])$ alla n men $f \notin C([0, \frac{\pi}{2}])$ varför $f_n \to f$ likf på $[0, \frac{\pi}{2}]$ inte kan gälla.

b) Visa att $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ inte konvergerar punktvis på $[0, \pi]$ samt avgör om $\lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi} |f_n(x)|\,dx$ existerar.

Lösning: Vi noterar att

$x \in (0, \pi)$: $f_n(x) \to 0$, $n \to \infty$

$x = \pi$: $f_n(\pi) = (-1)^n \not\to$ då $n \to \infty$.

Alltså $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar inte punktvis på $[0,\pi]$. Däremot gäller

$x = \pi$: $|f_n(\pi)| = 1 \to 1$, $n \to \infty$.

Från a) och b)-delen ovan fås att $(|f_n|)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar punktvis på $[0,\pi]$ med gränsfunktionen $\tilde{f}(x)$ där

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{0,\pi\} \\ 0 & x \in (0,\pi) \end{cases}$$

En majorerande funktion för $(|f_n(x)|)_{n=1}^{\infty}$ är $g(x)$, där $g(x) = 1$, $x \in [0,\pi]$. Satsen om dominerad konvergens ger

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} |f_n(x)|\,dx = \int_0^{\pi} \tilde{f}(x)\,dx = 0$$

Anm: Givetvis räcker det för att visa att $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} |f_n(x)|\,dx$ existerar, att man noterar att

$$0 \le |f_{n+1}(x)| \le |f_n(x)| \quad x \in [0,\pi] \quad \text{alla } n$$

och att $\int_0^{\pi} |f_n(x)|\,dx$ existerar för alla n då varje avtagande & nedåt begränsad talföljd konvergerar. Notera också att det gäller att

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f_n(x)\,dx$$

existerar trots att $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ inte är punktvis konvergent på $[0,\pi]$

(7) se kurslitteraturen

(8) Antag att $a_n \to 0$, $n \to \infty$, $b_n \to 0$, $n \to \infty$ och att $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ strängt avtagande. Antag vidare att $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} = A \in \mathbb{R}$. Visa att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A.$$

Bevis

Fixera $\varepsilon > 0$. Då finns N sådant att

$$\left| \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} - A \right| < \varepsilon \qquad \text{alla } n \geq N$$

dvs

$$A - \varepsilon < \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} < A + \varepsilon \qquad \text{alla } n \geq N.$$

Då $b_n > b_{n+1}$ för alla n gäller

$$(A-\varepsilon)(b_n - b_{n+1}) < a_n - a_{n+1} < (A+\varepsilon)(b_n - b_{n+1})$$

för alla $n \geq N$. Addera olikheterna för $n, n+1, \ldots, n+k$, k godtyckligt positivt heltal.

$$(A-\varepsilon)(b_n - b_{n+k+1}) < a_n - a_{n+k+1} < (A+\varepsilon)(b_n - b_{n+k+1})$$

för $n \geq N$. Låt $k \to \infty$ och utnyttja att $a_n, b_n \to 0$, $n \to \infty$. Vi får

$$(A-\varepsilon) b_n \leq a_n \leq (A+\varepsilon) b_n \qquad \text{alla } n \geq N$$

Då $b_n > 0$ för alla n gäller

$$-\varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} - A \leq \varepsilon \qquad \text{alla } n \geq N$$

och följaktligen

$$\left| \frac{a_n}{b} - A \right| \leq \varepsilon \qquad \text{alla } n \geq N.$$

Vi får att $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existerar och $= A$. $\square$

Anm: Påståendet i 8 är som flera noterat en diskret variant av l'Hospitals regel