Lösningsförslag till TMA976 den 7/4 2016

① Lös $y'' + y' = \cos x \cdot \sin(3x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Lösning: Karakteristisk ekv $0 = r^2 + r = (r+0)(r+1)$

ger $r_1 = 0$, $r_2 = -1$ och den allmänna homogena lösningen y_h

ges av $y_h(x) = A + Be^{-x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Med additionsformlerna för sin kan HL skrivas som

$$\cos x \cdot \sin(3x) = \frac{1}{2}(\sin(3x+x) + \sin(3x-x)) = \frac{1}{2}\sin(4x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Vi bestämmer partikulärlösning $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ där

$$y_{p_1}'' + y_{p_1}' = \frac{1}{2}\sin(4x)$$

$$y_{p_2}'' + y_{p_2}' = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Betrakta $\tilde{y}'' + \tilde{y}' = \frac{1}{2}\sin(ax)$ (*) $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ansätt $\tilde{y}(x) = b\cos(ax) + c\sin(ax)$. Derivering och insättning i (*) ger

$$(-ba^2 + ca)\cos(ax) + (-ca^2 - ba - \tfrac{1}{2})\sin(ax) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

dvs

$$\begin{cases} -ba^2 + ca = 0 \\ -ca^2 - ba = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{villket ger} \quad \begin{aligned} b &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^3 + a} \\ c &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2+1} \end{aligned}$$

Speciellt fås

$$y_{p_1}(x) = -\frac{1}{136}\cos(4x) - \frac{1}{34}\sin(4x) \qquad (a = 4)$$

$$y_{p_2}(x) = -\frac{1}{20}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x) \qquad (a = 2)$$

Den allmänna lösning $y = y_h + y_p$ ges av

$$y(x) = A + Be^{-x} - \frac{1}{136}\cos(4x) - \frac{1}{34}\sin(4x) - \frac{1}{20}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x)$$

Konstanterna A, B bestäms av villkoren $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

dvs

$$\begin{cases} A + B - \frac{1}{136} - \frac{1}{20} = 0 \\ -B - \frac{4}{34} - \frac{2}{10} = 1 \end{cases} \quad \text{dvs} \quad \begin{aligned} A &= \frac{3179}{2312} \\ B &= -\frac{112}{85} \end{aligned}$$

Svar: $y(x) = \frac{3179}{2312} - \frac{112}{85}e^{-x} - \frac{1}{136}\cos(4x) - \frac{1}{34}\sin(4x) - \frac{1}{20}\cos(2x) - \frac{1}{10}\sin(2x)$

② Lös $y' = \frac{x^2y - y}{y+1}$, $y(3) = 1$

Lösning: För $y \neq 0$ kan diff.-ekv. skrivas

$\frac{y+1}{y} y' = x^2 - 1$ vilket är en separabel diff.-ekv.

Vi får för $y > 0$

$y(x) + \ln(y(x)) = \frac{1}{3}x^3 - x + C$.

Villkoret $y(3) = 1$ (>0) ger

$1 = 9 - 3 + C$ dvs $C = -5$

Vi får $y(x) + \ln(y(x)) = \frac{1}{3}x^3 - x - 5$

Svar: $y(x) + \ln(y(x)) = \frac{1}{3}x^3 - x - 5$.

③ Beräkna $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos(2x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Lösning: Standardutvecklingarna

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4) \\ \ln(1+x) = x + O(x^2) \end{cases} \quad x \to 0 \qquad \text{ger}$$

$$\ln\left[\left(\frac{\cos x}{\cos(2x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right] = \frac{1}{x^2}\left(\ln(\cos x) - \ln(\cos(2x))\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) - \ln\left(1 - 2x^2 + O(x^4)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\left(-\frac{1}{2} + 2\right)x^2 + O(x^4)\right) = \frac{3}{2} + O(x^2) \to \frac{3}{2},\ x \to 0$$

Alltså $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos(2x)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}}$.

Svar: $e^{3/2}$

④ Beräkna $\lim_{n \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}}}{n}$

Lösning: Vi noterar att

$$e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}} = \sum_{k=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k = e^{\frac{1}{n}} \frac{1 - e^{\frac{n}{n}}}{1 - e^{\frac{1}{n}}}.$$

Detta medför att

$$\frac{e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}}}{n} = e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n(1 - e^{\frac{1}{n}})} (1 - e)$$

där $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \to 0$, $n \to \infty$ och

$n(1 - e^{\frac{1}{n}}) = -1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \to -1$, $n \to \infty$

Det sökta gränsvärdet är $e - 1$.

Svar: $e - 1$

Anm. Man kan alternativt se det sökta gränsvärdet som gränsvärdet av Riemannsummor för
$\int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e-1$

(5) Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k+2} k^{1+\frac{1}{k}}} (x+2)^{2k+1} \qquad (+)$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent resp. divergent

Lösning: Vi noterar att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k+2} k^{1+\frac{1}{k}}} (x+2)^{2k+1} = \frac{x+2}{9} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k \cdot k^{1+\frac{1}{k}}} ((x+2)^2)^k$$

Sätt $t = (x+2)^2$ och $a_k = \frac{1}{3^k \cdot k^{1+\frac{1}{k}}}$, $k = 1, 2, \dots$

Betrakta potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$ $(*)$.

Konvergensradien R för $(*)$:

$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k^{\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}}} \longrightarrow \frac{1}{3}$, $k \to \infty$ ger $R = 3$

Alltså gäller att $(*)$ är absolutkonvergent för $|t| < 3$ och divergent för $|t| > 3$. Detta medför att den ursprungliga serien $(+)$ är absolutkonvergent för $(x+2)^2 < 3$ och divergent för $(x+2)^2 > 3$ dvs absolutkonvergent för $x \in (-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3})$ och divergent för $x \in (-\infty, -2-\sqrt{3}) \cup (-2+\sqrt{3}, \infty)$.

För $x = -2+\sqrt{3}$ ger $(+)$ av $\frac{\sqrt{3}}{9} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$ som divergerar, då $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent och $\frac{\frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}}{\frac{1}{k}} \to 1$, $k \to \infty$, enligt jämförelsekriteriet på gränsvärdesform.

För $x = -2-\sqrt{3}$ fås samma serie som för $x = -2+\sqrt{3}$ gånger -1 och alltså är $(+)$ divergent också för $x = -2-\sqrt{3}$.

Svar: absolutkonvergens för $x \in (-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3})$ och divergens för övrigt

(6) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}$ $n = 1, 2, 3, \dots$

Avgör om talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar och bestäm gränsvärdet om så är fallet.

Lösning: Vi noterar att om $a_n \to a$, $n \to \infty$ så gäller $a = 2\sqrt{a}$ dvs $a = 0$ eller 4.

Vidare gäller att $a_n \in [0, 4]$ $n = 1, 2, \ldots$ eftersom att det gäller för $n = 1$ och 2 och om det gäller för a_n och a_{n+1} så gäller

$0 \leq a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n} \leq \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4$.

Slutligen noteras att gränsvärdet existerar om $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är monoton följd. Vi ser att

$a_1 < a_2 < a_3$. Antag $a_{n-2} < a_{n-1} < a_n$, $n \geq 3$ gäller

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} - (\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_{n-2}}) =$$
$$= \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-2}} > 0$$

eftersom funktionen $\sqrt{x}$ är strängt växande för $x \geq 0$.

Alltså gäller $a_{n+1} > \underbrace{a_n (> a_{n-1})}_{\text{det är antagandet}}$

Induktionsprincipen ger att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är strängt växande. Slutsats $\lim_{n \to \infty} a_n = 4$

Svar: Talföljden konvergerar med gränsvärdet 4.

(7) Se ELW

(8) Antag f positiv deriverbar funktion på $(0, \infty)$ sådan att f' är avtagande och $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$.

Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(n)}{f(n)}$ båda är konvergenta eller båda är divergenta

Lösning: Vi noterar att f' är positiv och avtagande och att även $\frac{f'}{f}$ är positiv och avtagande ty för $a, b \in (0, \infty)$, $a < b$ gäller

$$\frac{f'(a)}{f(a)} - \frac{f'(b)}{f(b)} = \underbrace{\frac{1}{f(a)f(b)}}_{>0} \left(f'(a)f(b) - f'(b)f(a) \right) \geq 0$$

då $f'(a) \geq f'(b) > 0$ och $f(a) \leq f(b)$.

Integralkriteriet ger att påståendet i uppgiften är sant omm ($\int_1^n f(x)\,dx$ $n = 1, 2, \ldots$ begränsad $\iff \int_1^n \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ $n = 1, 2, \ldots$ begränsad).

Men $\int_1^n f'(x)\,dx = f(n) - f(1)$ $n = 1, 2, \ldots$ och

$\int_1^n \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(f(n)) - \ln(f(1))$ $n = 1, 2, \ldots$

Då $\ln x$ är strängt växande på $(0, \infty)$ med värdemängd $\mathbb{R}$ fås att $\int_1^n f'(x)\,dx$ begr. omm $\int_1^n \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ begr. och alltså att påståendet i uppgiften visat. $\boxed{\text{Q}}$