Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976
Lösningsförslag
2017–01–13

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x(e^x + 1) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

Lösning:

Differentialekvationen

$$(D^2 - 2D + 1)[y(x)] = x(e^x + 1)$$

är linjär av andra ordningen med konstanta koefficienter och inhomogen. Det karakteristiska polynomet är

$$r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2.$$

Detta ger att den allmänna homogenlösningen kan skrivas på formen

$$y_h(x) = (A + Bx)e^x.$$

En partikulärlösning ges av

$$y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x),$$

där $(D - 1)^2[y_{p,1}(x)] = xe^x$ och $(D - 1)^2[y_{p,2}(x)] = x$.
Ansättningen $y_{p,1}(x) = e^x v(x)$ ger med förskjutningsregeln att $D^2[v(x)] = x$ vilket med $v(x) = (a + bx)x^2 = ax^2 + bx^3$ efter insättning i differentialekvationen $v''(x) = x$ ger $a = 0$, $b = \frac{1}{6}$. Ansättningen $y_{p,2}(x) = c + dx$ ger $c = 2\, d = 1$. Vi får alltså

$$y_p(x) = \frac{1}{6}x^3 e^x + 2 + x.$$

Allmänna lösningen $y(x)$ till den ursprungliga differentialekvationen ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (A + Bx + \frac{1}{6}x^3)e^x + 2 + x.$$

Begynnelsevillkoren bestämmer konstanterna A och B. Vi har

$$0 = y(0) = A + 2$$

och

$$0 = y'(0) = A + B + 1.$$

Detta ger $A = -2$ och $B = 1$.

Svar: $y(x) = (\frac{1}{6}x^3 + x - 2)e^x + x + 2$

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = (2x+y)^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(6p)

Lösning:

Efter variabelbytet $z(x) = 2x + y(x)$ fås den separabla differentialekvationen

$$z' = 2 + z^2.$$

Detta ges oss

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\frac{z(x)}{\sqrt{2}}) = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

och härur

$$z(x) = \sqrt{2}\tan(\sqrt{2}x + \tilde{C}), \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

Villkoret $y(0) = 0$ medför att $\tan \tilde{C} = 0$ och med $\tilde{C} = 0$ fås

Svar: $y(x) = \sqrt{2}\tan(\sqrt{2}x) - 2x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2\sqrt{2}})$

3. Beräkna $f^{(6)}(0)$ för

$$f(x) = \sin(x^2)\cos(x)\ln(1+x^2).$$

(6p)

Lösning:

Standardutvecklingarna

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \mathcal{O}(t^5)$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^4)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3)$$

ger

$$f(x) = (x^2 - \frac{x^6}{6} + \mathcal{O}(x^{10}))(1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4))(x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6)) =$$
$$= x^4 - x^6 + \mathcal{O}(x^8).$$

Från entydighetssatsen för Taylorutvecklingar följer att

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!} = -1$$

dvs $f^{(6)}(0) = -720$.

Svar: -720

4. För vilka $p \in \mathbb{R}$ konvergerar serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}(1 - n\sin(\frac{1}{n}))^p?$$

(6p)

Lösning: Vi noterar att

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6}(\frac{1}{n})^3\cos(\theta\frac{1}{n})$$

och

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6}(\frac{1}{n})^3 + \mathcal{O}((\frac{1}{n})^5)$$

för $n = 1, 2, 3, \ldots$ där $\theta = \theta(n) \in [0, 1]$. Följdaktligen är

$$1 - n\sin(\frac{1}{n}) > 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

och serien $\Sigma_{n=1}^{\infty}(1 - n\sin(\frac{1}{n}))^p$ är en positiv serie för varje $p \in \mathbb{R}$. Vidare gäller

$$\frac{(1 - n\sin(\frac{1}{n}))^p}{\frac{1}{n^{2p}}} = \frac{(\frac{1}{6n^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^4}))^p}{\frac{1}{n^{2p}}} \to (\frac{1}{6})^p, \quad n \to \infty.$$

Då $\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ konvergerar om och endast om $\alpha > 1$ föjer att serien i uppgiften konvergerar om och endast om $p > \frac{1}{2}$ enligt jämförelsekriteriet på gränsvärdesform.

Svar: $p > \frac{1}{2}$

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-3)^{2n+1}$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(7p)

Lösning: Vi noterar att

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-3)^{2n+1} = (x-3)\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(x-3)^{2n}.$$

Sätt $t = (x-3)^2$ och betrakta potensserien $\Sigma_{n=1}^{\infty}a_n t^n$, där

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Då

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e}, \quad n \to \infty$$

gäller att $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ är absolutkonvergent för $|t| < e$ och divergent för $|t| > e$. Följdaktligen är $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-3)^{2n}$ absolutkonvergent för $|x-3| < \sqrt{e}$ och divergent för $|x-3| > \sqrt{e}$. För $x = 3 \pm \sqrt{e}$ får vi serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^n.$$

Sätt $b_n = \frac{n!}{n^n} e^n, \ \ n = 1, 2, 3, \ldots$ Stirlings formel

$$n! = (\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}(1+\epsilon_n), \ \ \epsilon_n \to 0, \ n \to \infty$$

ger

$$b_n = \sqrt{2\pi n}(1+\epsilon_n) \to \infty, \ \ n \to \infty$$

Alltså divergerar $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^n$. Slutsatsen är att $\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-3)^{2n+1}$ är absolutkonvergent för $x \in (3-\sqrt{e}, 3+\sqrt{e})$ och divergerar för övrigt.

Svar: Absolutkonvergens för $x \in (3-\sqrt{e}, 3+\sqrt{e})$ och divergens för $x \in (-\infty, 3-\sqrt{e}] \cup [3+\sqrt{e}, \infty)$

6. Avgör för vilka $a \in \mathbb{R}$ som

$$\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{x}$$

existerar samt beräkna gränsvärdet i dessa fall.

(5p)

Lösning: Sätt $f(x,y) = \frac{\sin xy}{x}$. Funktionen $f(x,y)$ är definierad för $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus y-$axeln. För $x \neq 0$ gäller

$$f(x,y) = y \cdot \frac{\sin xy}{xy}.$$

Fixera godtyckligt $a \in \mathbb{R}$. Då

$$(x,y) \to (0,a)$$

gäller

$$xy \to 0.$$

(Observera att då $y \to a$ är y begränsad) Eftersom

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

gäller enligt gränsvärdesreglerna att

$$\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{x} = a.$$

Svar: Gränsvärdet existerar för alla reella tal a och är lika med a

7. Formulera och bevisa fixpunktssatsen.

(6p)

Lösning: Se D på kurshemsidan.

8. Antag att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är begränsade talföjder.

   (a) Visa att om $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (dvs talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar) så gäller

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

   (b) Avgör om

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

   gäller för alla begränsade talföljder $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

(3+4p)

Lösning: Antag att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är begränsade talföjder.

(a) Antag att $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Sätt $c_n = a_n + b_n$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$ Då $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ är en begränsad talföjd gäller att $\limsup_{n\to\infty} c_n \in \mathbb{R}$. Ska visa att

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = a + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Fixera godtyckligt $\epsilon > 0$. Eftersom $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ finns N sådant att

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \text{ alla } n \geq N.$$

Då gäller för $n \geq N$ att

$$a + \sup\{b_k : k \geq n\} - \epsilon < \sup\{c_k : k \geq n\} < a + \sup\{b_k : k \geq n\} + \epsilon.$$

Följdaktligen gäller då $n \to \infty$ att

$$a + \limsup_{n\to\infty} b_n - \epsilon \leq \limsup_{n\to\infty} c_n \leq a + \limsup_{n\to\infty} b_n + \epsilon.$$

Då $\epsilon > 0$ godtyckligt följer

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = a + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(b) Likheten

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

gäller ej allmänt. Sätt t ex för positiva heltal n

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ udda heltal} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

och

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ udda heltal} \\ 1 & \text{annars} \end{cases}$$

Då gäller

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n = 1$$

och

$$\limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 1.$$