Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet

Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976
Lösningsförslag
2017–04–11

1. Betrakta differentialekvationen

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + ay^{(2)} - 6y' + 2y = e^{-x}$$

där $a \in \mathbb{R}$. Givet att

$$y(x) = (A + Bx + C\cos x + D\sin x)e^x$$

löser motsvarande homogena differentialekvation för varje val av reella konstanter A, B, C och D, lös (för detta val av a) differentialekvationen

$$\begin{cases} y^{(4)} - 4y^{(3)} + ay^{(2)} - 6y' + 2y = e^{-x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y^{(3)}(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

Lösning: Vi noterar att

$$y(x) = (A + Bx + C\cos x + D\sin x)e^x$$

är den allmänna homogenlösningen till en 4:e ordningens linjär differentialekvation med konstanta koefficienter vars karakteristiska ekvation har en dubbelrot 1 och (enkel)rötterna $1 \pm i$. Vi får av detta en karakteristisk ekvation

$$0 = (r-1)^2 \cdot ((r-1)^2 + 1) = \ldots = r^4 - 4r^3 + 7r^2 - 6r + 2.$$

En jämförelse med den i problemet givna differentialekvationen ger att $a = 7$. Notera att om $a \neq 7$ måste

$$y(x) = (A + Bx + C\cos x + D\sin x)e^x$$

för varje val av A, B, C, D vara en lösning till $(a-7)y'' = 0$ vilket är omöjligt, tag t ex $A = 1$ och $B = C = D = 0$.

För att bestämma en partikulärlösning till vårt problem där $a = 7$ ansätter vi $y_p(x) = be^{-x}$. Derivering och insättning i differentialekvationen ger $b = \frac{1}{20}$. Vi har nu fått

$$y(x) = (A + Bx + C\cos x + D\sin x)e^x + \frac{1}{20}e^{-x}$$

där A, B, C, D ska bestämmas så att de fyra villkoren i uppgiften blir uppfyllda. Vi får följande linjära ekvationssystem

$$\begin{cases} 0 = & y(0) = & A + C + \frac{1}{20} \\ 0 = & y'(0) = & A + B + C + D - \frac{1}{20} \\ 0 = & y''(0) = & A + 2B + 2D + \frac{1}{20} \\ 0 = & y'''(0) = & A + 3B - 2C + 2D - \frac{1}{20} \end{cases}$$

En liten kalkyl ger

$$A = -\frac{1}{4},\ B = \frac{1}{2},\ C = \frac{1}{5},\ D = -\frac{2}{5}.$$

Detta ger oss

Svar: $y(x) = (-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x)e^x + \frac{1}{20}e^{-x}$

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(5p)

Lösning:

Löses med integrerande faktor $e^{-\frac{1}{2}x}$. Mycket lätt kalkyl ger

Svar: $y(x) = 3e^{\frac{1}{2}x} - x - 2$

3. Bestäm det största heltal n för vilket

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \cos x}{x^n}$$

existerar samt beräkna gränsvärdet i detta fall.

(6p)

Lösning:

Standardutvecklingarna

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3)$$

och

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^6)$$

ger

$$e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \cos x = (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24})(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}) + \mathcal{O}(x^6) =$$

$$= 1 + (\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24})x^4 + \mathcal{O}(x^6).$$

Av detta följer att

$$1 - e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \cos x = \frac{1}{12}x^4 + \mathcal{O}(x^6).$$

Detta medför att $n = 4$ och att gränsvärdet är $\frac{1}{12}$.

Svar: $n = 4$ och gränsvärdet $= \frac{1}{12}$

4. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^{n}(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1).$$

(6p)

Lösning: Standardutvecklingen

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\frac{1}{(1+\theta x)^{\frac{3}{2}}}x^2, \quad \theta = \theta(x) \in [0,1]$$

ger

$$\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 = \frac{1}{2}\frac{k}{n^2} + \mathcal{O}(\frac{n^2}{n^4})$$

och följdaktligen gäller

$$\Sigma_{k=1}^{n}(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1) = \frac{1}{2n^2}\Sigma_{k=1}^{n} k + n\mathcal{O}(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n}).$$

Vi har

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^{n}(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{4}(1 + \frac{1}{n}) + \mathcal{O}(\frac{1}{n})) = \frac{1}{4}.$$

Svar: $\frac{1}{4}$

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}(\frac{n!}{n^n} + (1 + \frac{1}{n})^{n^2})x^n$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(6p)

Lösning: Sätt

$$a_n = \frac{n!}{n^n},\quad b_n = (1+\frac{1}{n})^{n^2}\quad n = 1,2,3,\ldots$$

Vi noterar att

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = (\frac{n}{n+1})^n \to \frac{1}{e},\quad n \to \infty$$

och att

$$\sqrt[n]{|b_n|} = (\frac{n+1}{n})^n \to e,\quad n \to \infty$$

Av detta följer att $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ är absolutkonvergent för $|x| < e$ och divergent för $|x| > e$ medan $\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ är absolutkonvergent för $|x| < \frac{1}{e}$ och divergent för $|x| > \frac{1}{e}$. Satsen om potensseriers konvergens ger att

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$$

är absolutkonvergent för $|x| < \frac{1}{e}$ och divergent för $|x| > \frac{1}{e}$. Betrakta nu

$$(a_n + b_n)e^{-n} = \frac{n!}{(en)^n} + e^{n^2 \ln(1+\frac{1}{n})-n}.$$

Stirlings formel, $n! = (\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}(1+\epsilon_n)$, $\epsilon_n \to \infty$ då $n \to \infty$, ger

$$\frac{n!}{(en)^n} = e^{-2n}\sqrt{2\pi n}(1+\epsilon_n) \to 0,\ n \to \infty.$$

Standardutvecklingen $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$ ger

$$e^{n^2 \ln(1+\frac{1}{n})-n} = e^{-\frac{1}{2}+\mathcal{O}(\frac{1}{n})} \to \frac{1}{\sqrt{e}},\ n \to \infty.$$

Följdaktligen har vi att

$$|(a_n + b_n)(\pm e^{-n})| \not\to 0,\ n \to \infty$$

och potensserien divergerar för $x = \pm\frac{1}{e}$.

Svar: Absolutkonvergens för $|x| < \frac{1}{e}$ och
divergens för övrigt.

6. Antag att $x_n \geq 1$, $n = 1,2,3,\ldots$. Antag vidare att talföljden

$$x_n + \frac{1}{x_n},\ n = 1,2,3,\ldots$$

konvergerar. Visa att också talföljden x_n, $n = 1,2,3,\ldots$ måste konvergera[1].

[1]Notera att villkoret $x_n \geq 1$, $n = 1,2,3,\ldots$ inte kan ersättas med $x_n > 0$, $n = 1,2,3,\ldots$. Betrakta nämligen för $0 < a < 1$ följden

$$a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}, \ldots$$

(7p)

Lösning: Sätt

$$b = \lim_{n\to\infty}(x_n + \frac{1}{x_n})$$

vilket existerar enligt antagandet. Då vidare $x_n \geq 1$ för alla n samt att varje konvergent talföljd är begränsad måste $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en begränsad talföljd. Av detta följer att

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geq n\}$$

och

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k : k \geq n\}$$

existerar (som reella tal). Kalla dessa reella tal d respektive c. Vi har att

$$1 \leq c \leq d$$

och att om $c = d$ gäller att talföljden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar (med gränsvärdet $c = d$). Vi argumenterar nu med ett motsägelsebevis. **Antag** därför att $c < d$ gäller. Enligt limsup- och liminfdefinitionerna finns delföljder $(\tilde{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ och $(\hat{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ av $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sådana att

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = d$$

och

$$\lim_{n\to\infty} \hat{x}_n = c.$$

Men eftersom

$$b = \lim_{n\to\infty}(x_n + \frac{1}{x_n})$$

måste

$$c + \frac{1}{c} = d + \frac{1}{d}(= b).$$

Detta ger

$$\frac{1}{cd}(c^2 d + d - d^2 c - c) = 0,$$

dvs

$$(c - d)(cd - 1) = 0.$$

Vi har fått en motsägelse eftersom $1 < c < d$, och alltså följer att $c = d$.

Kommentar: Notera att det var i det sista steget som vi "verkligen"utnyttjade att $x_n \geq 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

7. Formulera och bevisa fixpunktssatsen.

(6p)

Lösning: Se D på kurshemsidan.

8. Antag att I är ett öppet intervall och att $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ är en funktionsföljd av kontinuerligt deriverbara funktioner på I. Antag vidare att $s_n \to s$ punktvis på I och att $s_n' \to f$ likformigt på I. Visa att s är en kontinuerligt deriverbar funktion på I och att $s' = f$. Motivera väl!

(7p)

Lösning: Vi observerar att $s_n' \in C(I)$ och $s_n' \to f$ likformigt på I medför att $f \in C(I)$. Fixera $a \in I$. Då existerar

$$\int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in I.$$

Enligt satsen om gränsövergång under integraltecknet gäller för godtyckligt $x \in I$ att

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} s_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x s_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} (s_n(x) - s_n(a)) = s(x) - s(a).$$

Följdaktligen har vi

$$s(x) = s(a) + \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in I$$

där funktionen i höger led är kontinuerligt deriverbar på I. Alltså är $s(x)$ deriverbar på I och påståendet i uppgiften följer då $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$.