Lösningsförslag till tentamen TMA976, den 17/8 2017

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' + y = 2\sin x \cos 2x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Lösning: Karakteristiska polynomet är $r^2+1 = (r+i)(r-i)$

vilket ger den allmänna homogenlösningen

$$y_h(x) = A\cos x + B\sin x$$

Omskrivning av $2\sin x\cos(2x)$ med additionsformlerna ger

$$2\sin x\cos(2x) = \sin(x+2x) + \sin(x-2x) = \sin 3x - \sin x,$$

En partikulärlösning ges av $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$ där

$$y_{p_1}'' + y_{p_1} = \sin 3x \quad \text{och} \quad y_{p_2}'' + y_{p_2} = -\sin x$$

Ansätt $y_{p_1}(x) = C\cos(3x) + E\sin(3x)$. Derivering och insättning i diff.-ekv ger

$$(C-9C)\cos 3x + (E-9E)\sin 3x = \sin 3x$$

vilket medför $C=0$, $E = -\frac{1}{8}$.

För att beräkna $y_{p_2}(x)$ betraktas hjälpekvationen

$$\tilde{y}_{p_2}'' + \tilde{y}_{p_2} = -e^{ix}$$

Ansätt $\tilde{y}_{p_2}(x) = e^{ix}\cdot z(x)$. Förskjutningsregeln ger

$$e^{ix}(D+2i)D[z(x)] = -e^{ix}$$

dvs $z''(x) + 2iz'(x) = -1$. Sätt $z(x) = Fx$. Vi får $2iF = -1$

dvs $F = \frac{i}{2}$. Detta ger oss $y_{p_2}(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{i}{2}xe^{ix}\right) =$

$= \frac{x}{2}\cos x$. Den allmänna lösningen till den ursprungliga diff.-ekv ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\cos x + B\sin x - \frac{1}{8}\sin(3x) + \frac{x}{2}\cos x$$

Villkoren $y(0) = y'(0) = 0$ ger

$$A = 0, \quad B - \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = 0 \qquad \text{dvs} \quad A = 0,\ B = -\frac{1}{8}$$

Svar: $y(x) = -\frac{1}{8}\sin x - \frac{1}{8}\sin 3x + \frac{x}{2}\cos x$

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(x+y)^2}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Lösning: Med variabelbytet $z(x) = x + y(x)$ får den separabla diff. ekv.

$$z'(x) = 1 + \frac{1}{2} z^2(x)$$

Detta ger $\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^2} z'(x) = 1$ och vi får

$$\sqrt{2} \arctan\left(\frac{z(x)}{\sqrt{2}}\right) = x + C$$

Villkoret $y(0) = 1$ ger $z(0) = 1$ och alltså

$$C = \sqrt{2} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Vi får $\arctan\left(\frac{z(x)}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ och speciellt

$$y(x) = -x + \sqrt{2} \tan\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

för $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}\pi}{2} - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \frac{\sqrt{2}\pi}{2} - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

Svar: $y(x) = -x + \sqrt{2} \tan\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

3. Beräkna $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(x + \frac{1}{n}\right)^k$ för $x \in (0,1)$

Lösning: Vi noterar att

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(x+\frac{1}{n}\right)^k = \frac{1-\left(x+\frac{1}{n}\right)^n}{1-\left(x+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1-\left(x+\frac{1}{n}\right)^n}{1-x+\frac{1}{n}}$$

vilket gäller för fixt $x \in (0,1)$ för n tillräckligt stort.

Vi noterar att $1 - x + \frac{1}{n} \to 1 - x$ då $n \to \infty$ och

$$1 - \left(x + \frac{1}{n}\right)^n \to 1 \text{ då } n \to \infty \text{ för } x \in (0,1).$$

Svar: $\frac{1}{1-x}$.

4. Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$

Lösning: Vi noterar att $\frac{x^x-1}{x\ln x}$ endast är definierad för $x > 0$ så $\lim_{x\to 0} \ldots = \lim_{x\to 0+} \ldots$ Omskrivning av täljaren ger $x^x - 1 = e^{x\ln x} - 1 = 1 + x\ln x + O((x\ln x)^2) - 1$ då $x \ln x \to 0$ då $x \to 0+$. Alltså

$$\frac{x^x-1}{x\ln x} = 1 + O(x\ln x) \to 1, \text{ då } x \to 0+.$$

Svar: $\lim_{x\to 0} \frac{x^x - 1}{x \ln x} = 1$

5. Avgör för vilka $x \in R$ som serien $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2} x^{2n}$ är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

Lösning: Sätt $t = x^2$ och betrakta potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2} t^n$, i variabeln t.

Sätt $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n^2}$, $n = 1, 2, \ldots$

Då $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$ får att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ är absolutkonvergent för $|t| < \frac{1}{e}$ och divergent för $|t| > \frac{1}{e}$. Detta ger att $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2} x^{2n}$ är absolutkonvergent för $|x| < \frac{1}{\sqrt{e}}$ och divergent för $|x| > \frac{1}{\sqrt{e}}$. För $x = \pm\frac{1}{\sqrt{e}}$ gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n})^{n^2} \cdot (\pm\frac{1}{\sqrt{e}})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2 \ln(1+\frac{1}{n})} \cdot e^{-n} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^3})) - n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} + O(\frac{1}{n})}.$$

Då $e^{-\frac{1}{2}+O(\frac{1}{n})} \not\to 0$ då $n\to\infty$ divergerar serien.

Svar: Potensserien är absolutkonvergent för $x \in (-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ och divergent för övrigt.

6. Antag att $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n > 1$, $n = 1, 2, \ldots$ är en växande divergent följd. Visa att
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n \ln^2 s_n}$$ konvergerar.

Lösning: Vi noterar att $a_1 > 1$ och $a_n \geq 0$ för $n = 2, 3, \ldots$ och att $a_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$ Serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n \ln^2 s_n}$ är en positiv serie så konvergensen är visad om man visar att följden av partialsummorna är uppåt begränsad.

För $N = 2, 3, 4, \ldots$ gäller
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{s_n \ln^2 s_n} = \frac{a_1}{s_1 \ln^2 s_1} + \sum_{n=2}^{N} \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n \ln^2 s_n} \leq$$
$$\leq \frac{a_1}{s_1 \ln^2 s_1} + \sum_{n=2}^{N} \int_{s_{n-1}}^{s_n} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx$$
då $\frac{1}{x \ln^2 x}$ är en positiv avtagande funktion

Då $\int_{s_1}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx$ är en konvergent integral ($s_1 > 1$)

gäller $\int_{s_1}^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = C < \infty$ och alltså

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{s_n \ln^2 s_n} \leq \frac{a_1}{s_1 \ln^2 s_1} + C < \infty \quad \text{för alla } N = 1, 2, \ldots$$

Påståendet visat.

7. Se kurslitteraturen

8. Påstående 1 är sant. För bevis se kurslitteraturen.

Påstående 2 är falskt. Sätt t.ex.

$$s_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{n} & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Då gäller att $s_n \to s$ punktvis på $[0,1]$ där $s(x) = 0$, $x \in [0,1]$, s kontinuerlig funktion på $[0,1]$, ingen av $s_n(x)$ är kontinuerliga på $[0,1]$ och dessutom $s_n \to s$ likformigt på $[0,1]$ då

$$\sup_{x \in [0,1]} |s_n(x) - s(x)| = \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$