

① Lös

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 4y = e^{2x} + e^{-x} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Lösning: Karakteristiskt polynom $r^3 - 3r^2 + 4 = (r+1)(r^2 - 4r + 4)$
 $= (r+1)(r-2)^2$ ges med standardbehandlingar

$$r_1 = -1, m_1 = 1, r_2 = 2, m_2 = 2$$

Alltså $y_h(x) = Ae^{-x} + (B + Cx)e^{2x}$.

Vidare gäller $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$ där

$$y_{p_1}''' - 3y_{p_1}'' + 4y_{p_1} = e^{2x}, \quad y_{p_2}''' - 3y_{p_2}'' + 4y_{p_2} = e^{-x}$$

Ansätt $y_{p_1}(x) = e^{2x} \cdot z_1(x)$, $y_{p_2}(x) = e^{-x} \cdot z_2(x)$ och använd

förskjutningsregeln. Då gäller

$$(D+3)D^2[z_1(x)] = 1, \quad D(D-3)^2[z_2(x)] = 1$$

$$z_1''' + 3z_1'' = 1 \quad \text{har en lösning} \quad z_1(x) = \frac{1}{6}x^2$$

$$z_2''' - 6z_2'' + 9z_2' = 1 \quad \text{har en lösning} \quad z_2(x) = \frac{1}{9}x$$

Den allmänna lösningen till diff.-dv (*) ges av

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (A + \frac{1}{9}x)e^{-x} + (B + Cx + \frac{1}{6}x^2)e^{2x}$$

Konstanterna A, B och C bestäms av villkoren

$$\begin{cases} 0 = y(0) = A + B \\ 0 = y'(0) = -A + 2B + C + \frac{1}{9} \\ 0 = y''(0) = A + 4B + 4C + \frac{1}{9} \end{cases}$$

där $A = \frac{1}{27}$, $B = -\frac{1}{27}$, $C = 0$

Svar: $y(x) = (\frac{1}{27} + \frac{1}{9}x)e^{-x} + (\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{27})e^{2x}$

② Lös $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$, $x > 0$

med variabelbytet $y(x) = x \cdot z(x)$

Lösning: Då $y'(x) = z(x) + x \cdot z'(x)$ får

$$xz(x) + x^2 z'(x) = xz(x) + \sqrt{(xz(x))^2 - x^2}$$

lös $x^2 z'(x) = |x| \sqrt{(z(x))^2 - 1} = x \sqrt{(z(x))^2 - 1}$ d' $x > 0$

Detta är en separabel diff-ekv. Vi ser att $z(x) = \pm 1$

är två lösningar, där $y(x) = \pm x$.

Antag $(z(x))^2 > 1$. Vi har

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \cdot z' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Sått $g(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Vi får primitiva funktioner

$$G(z) = \ln |z + \sqrt{z^2 - 1}|, \quad F(x) = \ln x$$

Alltså $\ln |z(x) + \sqrt{(z(x))^2 - 1}| = \ln x + C = \ln x + \ln C', \quad C' > 0$

Detta ger $z(x) + \sqrt{(z(x))^2 - 1} = C'' x, \quad C'' \neq 0$

Kvadrering ger $(z(x))^2 - 1 = (C'' x - z(x))^2 = (z(x))^2 - 2C'' x z(x) + (C'' x)^2$

där $z(x) = \frac{1 + (C'' x)^2}{2C'' x}$

Vi får lösningarna $y(x) = \frac{1 + (C'' x)^2}{2C''}, \quad C'' \neq 0, \quad y(x) = \pm x$

Svar: $y(x) = \frac{1 + (C'' x)^2}{2C''}, \quad C'' \neq 0, \quad y(x) = \pm x$.

③ Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \left(\sqrt{\frac{2\pi}{n}} \right) \right)^n$

Lösning: Omskrivningen $\left(\cos \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \right)^n = e^{n \ln \left(\cos \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \right)}$

och standardutvecklingarna

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + O(t^4) \quad t \rightarrow 0$$

$$\ln(1+s) = s + O(s^2), \quad s \rightarrow 0$$

ger $n \ln \left(\cos \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \right) = n \ln \left(1 - \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) =$

$$= n \cdot \left(-\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = -\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow -\pi, \quad n \rightarrow \infty.$$

Funktionen e^x är kontinuerlig i $x = -\pi$.

Gränsvärdet är lika med $e^{-\pi}$

Svar: $e^{-\pi}$.

④ Avgör för vilka $a \in \mathbb{R}$ som gränsvärdet $\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} x e^{axy - x^2 - y^2}$ existerar.

Lösning: Om gränsvärdet existerar måste det vara 0 då

$f(0,y) = 0$ för alla $y \in \mathbb{R}$ där $f(x,y) = x e^{axy - x^2 - y^2}$.

Med polära koordinater $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ gäller
 $|a| < 2$: $|f(r \cos \theta, r \sin \theta)| = r |\cos \theta| e^{-r^2(1 - \frac{a}{2} \sin 2\theta)} \leq r e^{-r^2(1 - \frac{|a|}{2})} \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$
 $|a| \geq 2$: Finns $\tilde{\theta} \in [0, 2\pi]$ sådant att $1 - \frac{a}{2} \sin(2\tilde{\theta}) = 0$, $\cos \tilde{\theta} \neq 0$
 och alltså $f(r \cos \tilde{\theta}, r \sin \tilde{\theta}) \not\rightarrow 0, r \rightarrow \infty$
 Slutligen $|a| < 2$ nödvändigt och tillräckligt för väster $\sim$ gr. o.

Svar: $a \in (-2, 2)$

⑤ Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (\sqrt[n]{n} - 1) x^{2n}$
 är absolutkonvergent, betingad konvergent resp. divergent

Lösning: Sätt $a_n = 2^n (\sqrt[n]{n} - 1)$ $n = 1, 2, \dots$

och $t = x^2$. Betrakta potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (\sqrt[n]{n} - 1) t^n$.

Vi noterar att $\frac{1}{n+1} \ln(n+1)$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2 \left| \frac{e^{\frac{1}{n+1} \ln(n+1)} - 1}{e^{\frac{1}{n} \ln n} - 1} \right| = \{ e^s = 1 + s + O(s^2), s \rightarrow 0 \} =$$

$$= 2 \left| \frac{\frac{1}{n+1} \ln(n+1) + O((\frac{1}{n+1} \ln(n+1))^2)}{\frac{1}{n} \ln n + O((\frac{1}{n} \ln n)^2)} \right| \rightarrow 2, n \rightarrow \infty$$

Alltså $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (\sqrt[n]{n} - 1) t^n$ har konvergensradie $R = \frac{1}{2}$

hw. serien är absolutkonvergent för $|t| < \frac{1}{2}$ och divergent

för $|t| > \frac{1}{2}$. För $t = \frac{1}{2}$ gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (\sqrt[n]{n} - 1) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} + O\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right) \right)$$

Detta är en divergent serie enligt jämförlekriteriet

på gränsvärdesform då $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ divergerar då

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerar. Detta ger att den ursprungliga

potensserien är divergent då $|x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ och absolutkonvergent
 då $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Svar: absolutkonvergens för $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, divergent för

⑥ $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ kontinuerlig och $f(x)$ existerar för
 $x \in (0, 1)$. Visa att $f(x) \neq 1$ för alla $x \in (0, 1)$ med för
 att $f(x)$ har en entydigt bestämd fixpunkt.

Lösning: Sätt (som i beviset av fixpunktsatsen)

$g(x) = f(x) - x$. Då gäller g kontinuerlig funktion på $[0,1]$

med $g(0) \geq 0$ och $g(1) \leq 0$. Alltså finns $\tilde{x} \in [0,1]$

sådan att $g(\tilde{x}) = 0$, dvs $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

Analogt att f har två fixpunkter $\tilde{x}$ och $\bar{x} \in [0,1]$.

Då gäller $g(\tilde{x}) = g(\bar{x}) = 0$. Eftersom g derivierbar mellan

$\tilde{x}$ och $\bar{x}$ ges Rolles satz att det finns ξ mellan $\tilde{x}$ och $\bar{x}$,

dvs $\xi \in (0,1)$, sådan att $g'(\xi) = 0$. Men detta ger

$f'(\xi) = 1$ vilket ger en motsägelse. Alltså finns

exakt en fixpunkt till f i $[0,1]$.

⑦ Se textboken

⑧ Givet $g_n, g \in C([0,1])$, $n=1,2,\dots$ och

1) $g_n(x) \leq g_{n+1}(x) \leq g(x)$ alla $x \in [0,1]$, $n=1,2,\dots$

2) $g_n \rightarrow g$ punktvis på $[0,1]$.

Visa att $g_n \rightarrow g$ likformigt på $[0,1]$.

Bevis: Antag att $g_n \not\rightarrow g$ likformigt på $[0,1]$

Då finns $\varepsilon > 0$ sådant att för varje N finns $n \geq N$

och $x_n \in [0,1]$ sådant att $g(x_n) - g_n(x_n) \geq \varepsilon$.

Antag att detta gäller för varje n (betrakta
annars en delföljd n_n så att detta gäller).

Sätt t.ex. $a = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. Här gäller $a \in [0,1]$.

Vi noterar nu att

1) det finns N så att $g(a) - g_n(a) < \frac{\varepsilon}{6}$ alla $n \geq N$

då $g_n \rightarrow g$ punktvis på $[0,1]$

2) det finns $\delta > 0$ så att

$|x-a| < \delta, x \in [0,1] \Rightarrow$

då g_n, g kontinuerliga

$$|g_n(x) - g_n(a)| < \frac{\varepsilon}{6}$$

$$|g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{6}$$

Det gäller för $\tilde{N}$ tillräckligt stort och för $n \geq \tilde{N} \gg N$

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq \sup_{|x-a|<\delta} |(g-g_n)(x)| \leq \{ \text{här utnyttjas } \delta \} \leq \\ &\leq \sup_{|x-a|<\delta} (g(x)-g_n(x)) \leq \\ &\leq g(a)-g_n(a) + 2 \frac{\varepsilon}{6} \leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

Motsägelse. Alltså gäller

$g_n \rightarrow g$ likformigt på $[a,1]$.