

① $y^{(4)} - 4y''' + 10y'' - 12y' + 5y = 8e^x$ (*)

Visa att x^2e^x löser (*) och bestäm samtliga lösningar

Lösning: Sätt $y(x) = z(x)e^x$. Insättning i (*) ger

$$P(D)[y(x)] = 8e^x \quad \text{där} \quad P(D) = D^4 - 4D^3 + 10D^2 - 12D + 5$$

ger (med eller utan förljtningsregeln)

$$\begin{aligned} ((D+1)^4 - 4(D+1)^3 + 10(D+1)^2 - 12(D+1) + 5)[z(x)] &= \\ &= (D^4 + 4D^2)[z(x)] = 0 \end{aligned}$$

Integration ger $z'' + 4z = 4x^2 + ax + b$.

Denna linjära diff-ek har en partikulärlösning

$$z_p(x) = x^2 + Ax + B \quad \text{och} \quad \text{den allmänna homogena lösningen}$$

$$z_h(x) = C \cos(2x) + E \sin(2x).$$

Alltså ges den allmänna lösningen till (*) av

$$y(x) = (Ax + B + C \cos(2x) + E \sin(2x) + x^2)e^x, \quad A, B, C, E \in \mathbb{R}$$

där vi har att x^2e^x är en lösning till (*).

Svar: $y(x) = (Ax + B + C \cos(2x) + E \sin(2x) + x^2)e^x$

② $y'' + 2(1-x)y' + x(x-2)y = 0$

Lös diff-ek med ansatzen $y(x) = e^{Ax^a} \cdot z(x)$.

Lösning: Derivering av $y(x) = e^{Ax^a} \cdot z(x)$ ger

$$y'(x) = e^{Ax^a} (Aax^{a-1}z(x) + z'(x))$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= e^{Ax^a} \left((Aax^{a-1})^2 z(x) + 2Aax^{a-1}z'(x) + z''(x) + \right. \\ &\quad \left. + Aa(a-1)x^{a-2}z(x) \right) \end{aligned}$$

Insättning i diff-ek ger

$$z'' + f(x)z' + g(x)z = 0$$

där $f(x) = 2Aax^{a-1} + 2(1-x)$. Med $a=2$, $A=\frac{1}{2}$

får $f(x) = 2$ och $g(x) = 1$. Diff-ek $z'' + 2z' + z = 0$

har lösningen $z(x) = (bx+c)e^{-x}$ och alltså har
 den ursprungliga diff-ekv lösningen

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 - x} (Bx + c), \quad B, c \in \mathbb{R}$$

Svar: $y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2 - x} (Bx + c)$

③ Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n})^{\frac{1}{n}}$

Lösning: Vi observerar att

$$\int_0^n \sqrt{x} dx \leq \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} \leq \int_0^{n+1} \sqrt{x} dx$$

da $\sqrt{x}$ är ökarande funktion. Alltså gäller

$$\frac{2}{3} n^{3/2} \leq \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} \leq \frac{2}{3} (n+1)^{3/2}$$

Vidare får

$$\left(\frac{2}{3} n^{3/2} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \left(\frac{3}{2} \ln n + \ln \frac{2}{3} \right)} = e^{\frac{3}{2} + \frac{\ln \frac{2}{3}}{n}} \rightarrow e^{\frac{3}{2}}, n \rightarrow \infty$$

Da $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ gäller

$$\left(\frac{2}{3} (n+1)^{3/2} \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow e^{\frac{3}{2}}, n \rightarrow \infty$$

Svar: $e^{\frac{3}{2}}$

④ Avgör konvergens för $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln n}{n(n+2)}$

Lösning: Sätt $a_n = \frac{\ln n}{n(n+2)}, n = 1, 2, 3, \dots$

Da $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} = \left(1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \cdot \frac{1 + \frac{2}{n}}{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{3}{n})}$

$\rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ följer att potensserien har konvergensraden

$= 1$. Alltså är potensserien absolutkonvergent för

$|x| < 1$ och divergent för $|x| > 1$. För $|x| = 1$ gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n \ln n}{n(n+2)} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n(n+2)} \quad \text{Da}$$

$$0 \leq \frac{\ln n}{n(n+2)} = \frac{\ln n}{n+2} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$$

och $\sup_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n+2} = C < \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergerar

följer att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln n}{n(n+2)}$ är absolutkonvergent för

$|x| \leq 1$

Svar: Potensserien är absolutkonvergent för $|x| \leq 1$ och
 divergent för $|x| > 1$.

⑤ För vilken $x \in \mathbb{R}$ konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} n^x \cdot x^n$?

Lösning: Det gäller att

$$|n^x \cdot x^n|^{\frac{1}{n}} = (n^{\frac{x}{n}})^{\frac{1}{n}} \cdot |x| \rightarrow |x|, \quad n \rightarrow \infty$$

då $n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ och $t \mapsto t^x$ är kontinuerlig

i $t=1$ för fixt x . Rotkriteriet ger att $\sum_{n=1}^{\infty} n^x \cdot x^n$

är absolutkonvergent för $|x| < 1$ och då också konvergent

För $|x| > 1$ gäller att $n^x \cdot x^n \not\rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ och alltså

är serien divergent.

$x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty} n$ divergerar

$x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergerar enligt Leibniz kriterium.

kriterium

Svar: Serien konvergerar för $x \in [-1, 1)$ och är divergent för övrigt

⑥ Anslut att $f_n \rightarrow f$ likf. på $[0, 1]$, $f_n \in C([0, 1])$ alla n

och

$$(*) \quad \begin{cases} g_n' + g_n = f_n & x \in [0, 1] \\ g_n(0) = \frac{1}{n} \end{cases} \quad n=1, 2, \dots$$

Visa att $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar likförmigt på $[0, 1]$.

Lösning: Vi har att e^{+x} är en integrerande faktor

för $g_n' + g_n = f_n$ och alltså gäller

$$\frac{d}{dx} (e^x g_n(x)) = e^x f_n(x), \quad x \in [0, 1].$$

Integrering från 0 till $x \in [0, 1]$ ger

$$e^x g_n(x) - g_n(0) = \int_0^x e^t f_n(t) dt$$

$$\text{dvs } g_n(x) = e^{-x} \cdot \frac{1}{n} + e^{-x} \int_0^x e^t f_n(t) dt, \quad n=1, 2, \dots$$

$$\text{Sätt } g(x) = e^{-x} \int_0^x f(t) dt, \quad \text{observera att } f \in C([0, 1])$$

då $f_n \rightarrow f$ likf. på $[0, 1]$ och f_n kontinuerliga

Vidare gäller

$$|g_n(x) - g(x)| = e^{-x} \left| \frac{1}{n} + \int_0^x e^t (f_n(t) - f(t)) dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} + \sup_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f(t)| \int_0^x e^{-t} dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} + e \cdot \sup_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f(t)|$$

Alltså

$$\sup_{x \in [0,1]} |g_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{n} + e \sup_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f(t)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

dvs $g_n \rightarrow g$ unif. på $[0,1]$.

Svar: —

(7) se ELW

(8) $f \in C^2(I)$ där $I \subset \mathbb{R}$ öppet intervall.

$f(\alpha) = 0$ där $\alpha \in I$

$x_0 \in I$ och $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \in I, n = 0, 1, 2, \dots$

Visa

$$a) |x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{K}{2L} |x_n - \alpha|^2$$

$$b) |x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{K}{2L} |x_{n+1} - x_n|^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

där $K = \sup_{x \in I} |f''(x)|$ och $L = \inf_{x \in I} |f'(x)|$

Beris: Taylorutveckla f kring $x = x_n$ med

rest term på Lagrange form av ordning 2 ger

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} (x - x_n)^2 \quad (*)$$

där ξ_n ligger mellan x och x_n .

Sätt $x = \alpha$. Detta ger

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2} (\alpha - x_n)^2$$

$$\text{dvs } |x_{n+1} - \alpha| = \left| \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \right| |x_n - \alpha|^2 \leq \frac{K}{2L} |x_n - \alpha|^2$$

där vi använt $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

a) är visad.

Sätt $x = x_{n+1}$ i (*). Detta ger

$$f(x_{n+1}) = \underbrace{f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)}_{=0} + \frac{f''(\hat{\xi}_n)}{2} (x_{n+1} - x_n)^2 \quad (**)$$

Då $f(x_{n+1}) - f(\alpha) = \underbrace{f(x_{n+1})}_{=0} - f(\alpha) = f'(\eta_n)(x_{n+1} - \alpha)$ för något η_n mellan

x_{n+1} och α för n

$$|x_{m+1} - \alpha| \leq \frac{1}{L} |f(x_{m+1})| \leq \{x_m\} \leq \frac{K}{2L} |x_{m+1} - x_m|^2$$

b) as usual

