

- ① Lös $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$. Vi vet att det finns lösningar y_1, y_2 sådana att $y_1 = xy_2$

Lösning: Karakteristiska polynomet ges av

$$P(r) = r^4 - 4r^3 + 8r^2 - 8r + 4. \text{ När nollställena till } P(r)$$

beräknade kan lösningen skrivas mer p-formen

" $\sum_j p_j(x) e^{r_j x}$ ". Från $y_1 = xy_2$ följer att $P(r)$ måste ha ett

nollställe av multipliciteten ≥ 2 . Alltså är detta

nollställe ett nollställe till $P'(r) = 4r^3 - 12r^2 + 16r - 8 =$

$$= 4(r^3 - 3r^2 + 4r - 2). \text{ Polynomdivision ger}$$

$$P(r) = \frac{1}{4}P'(r)(r-1) + r^2 - 2r + 2$$

Då $r^2 - 2r + 2 = (r-1)^2 + 1 = (r-1+i)(r-1-i)$ för att

$r_{1,2} = 1+i, r_{3,4} = 1-i$ är nollställena till $P(r)$ (d.v.s.

$P(r)$ har reella koefficienter så att om r_0 är ett nollställe måste också $\bar{r}_0$ vara ett nollställe). Detta ger den

allmänna lösningen

$$y(x) = (A+Bx)\cos x + (C+Dx)\sin x$$

Svar: $y(x) = (A+Bx)\cos x + (C+Dx)\sin x$

- ② Lös $y'' + \frac{ay}{x^2} = 0, x > 0$ för alla $a \in \mathbb{R}$.

Lösning: Differentialekvationen är av typ Euler. Gör

variabelbytet $t = \ln x$. Med $y(x) = \tilde{y}(t(x))$ har vi

$$\frac{d}{dx} \tilde{y}(t(x)) = \tilde{y}'(t(x)) \cdot \frac{dt}{dx} = \tilde{y}'(t(x)) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \tilde{y}(t(x)) = \tilde{y}''(t(x)) \cdot \frac{1}{x^2} - \tilde{y}'(t(x)) \cdot \frac{1}{x^2}$$

Insättning i differ. ger

$$\tilde{y}''(t) - \tilde{y}'(t) + a\tilde{y}(t) = 0, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Karakteristiska drar: } r^2 - r + a = \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + a = (r-r_1)(r-r_2)$$

$$\text{Fall 1: } \frac{1}{4} - a > 0 \text{ d.v.s. } a < \frac{1}{4}$$

$$\Gamma_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - a} \quad \text{olika reella lösningar}$$

$$\vec{y}(t) = A e^{\Gamma_1 t} + B e^{\Gamma_2 t}$$

Fall 2: $\frac{1}{4} - a = 0$, dvs $a = \frac{1}{4}$

$$\Gamma_{1,2} = \frac{1}{2} \quad \text{olika reella lösningar} \quad \vec{y}(t) = (A + Bt) e^{\frac{1}{2}t}$$

Fall 3: $\frac{1}{4} - a < 0$, dvs $a > \frac{1}{4}$

$$\Gamma_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{a - \frac{1}{4}} \quad \text{olika reella lösningar}$$

$$\vec{y}(t) = A e^{\frac{1}{2}t} \cos(\sqrt{a - \frac{1}{4}} t) + B e^{\frac{1}{2}t} \sin(\sqrt{a - \frac{1}{4}} t)$$

Insättning av $\vec{y}(x) = \vec{u}(x)$ ger

Svar: $a < \frac{1}{4}$ $y(x) = A x^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a}} + B x^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a}}$

$a = \frac{1}{4}$ $y(x) = (A + B \ln x) x^{\frac{1}{2}}$

$a > \frac{1}{4}$ $y(x) = A x^{\frac{1}{2}} \cos(\sqrt{a - \frac{1}{4}} \ln x) + B x^{\frac{1}{2}} \sin(\sqrt{a - \frac{1}{4}} \ln x)$

③ $a, b \in \mathbb{R}$, $c_n = \begin{cases} \frac{a}{n+1} & n \text{ udda} \\ \frac{b}{n+2} & n \text{ jämnt} \end{cases}$

Bestäm möjliga värden på a, b så att $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergerar
med summan 1

Lösning: Visar att om en av a, b är noll så divergerar
serien enligt jämförelsekriteriet, om $a=b=0$ konvergerar
serien men har summan 0 och om a och b har samma
tecken så divergerar serien. Alltså måste a och b ha
olika tecken för konvergens av serien. Betrakta den $2N$ te

partialsumman $S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} c_n = \sum_{k=1}^N (c_{2k-1} + c_{2k})$. Här är

$$c_{2k-1} + c_{2k} = a \frac{1}{2k} + b \frac{1}{2(k+1)} = \frac{a}{2k(k+1)} + \frac{b+a}{2(k+1)}$$

Härifrån infer att $b+a=0$ är ett nödvändigt och tillräckligt
villkor för konvergens. Återstår att bestämma a sådant att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{2k(k+1)} = 1$$

Men $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{N(N+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots +$
 $+ (\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}) = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1, N \rightarrow \infty$

vilket ger $\frac{a}{2} = 1$

Svar: $a = 2 = -b$

④ Undersöka konvergens för $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$.

Lösning: Sätt $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$, $n = 1, 2, \dots$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ ges att

potensserien har konvergenzradie $R = \frac{1}{e}$.

Alltså är potensserien absolutkonvergent för $|x| < \frac{1}{e}$

och divergent för $|x| > \frac{1}{e}$. Återstår att studera

fallen $x = \pm \frac{1}{e}$.

Fall $\frac{1}{e}$: $(\frac{1}{e})^n (1 + \frac{1}{n})^{n^2} = e^{-n + n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})} =$

$= \{ \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3), t \rightarrow 0 \} =$

$= e^{-n + n^2(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^3}))} = e^{-\frac{1}{2} + O(\frac{1}{n})} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

Alltså divergerar $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{e})^n (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$.

Fall $-\frac{1}{e}$: Då $(-\frac{1}{e})^n (1 + \frac{1}{n})^{n^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ kommer

även $\sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{e})^n (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$ att divergera

Svar: Potensserien är absolutkonvergent för $|x| < \frac{1}{e}$ och divergent för övrigt.

⑤ $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, $f_3(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, ..., för $x \geq 0$

Bestäm $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x))$ samt

argu om funktionsföljden konvergerar likformigt på $[0, \infty)$.

Lösning: $f_n(x)$ är kontinuerliga funktioner på $[0, \infty)$

för alla n och $f_n(0) = 0$ också för alla n .

Alltså gäller $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$.

Vi noterar att för godtyckligt fixt $x > 0$ gäller

$0 < f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ alla n , där $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ växande och

$f_n(x) = \sqrt{x + f_{n-1}(x)} \leq \sqrt{x + f_n(x)}$

Detta ger

$$(f_n(x))^2 \leq x + f_n(x)$$

$$\text{dvs } (f_n(x) - \frac{1}{2})^2 \leq x + \frac{1}{4}$$

$$\text{och alltså } f_n(x) \in (0, \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}]$$

dvs $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ är uppåt begränsad. Detta ger

att $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ konvergerar (monotont + uppåt begränsad följd). Kall gränsvärdet a .

Vi har $a > 0$ och $a = \sqrt{x + a}$. Detta ger

$$a = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x}.$$

$$\text{Alltså gäller } \lim_{0 < x \rightarrow 0} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x}) = 1$$

Vi har

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Di $f_n(x)$ kontinuerliga och n p: $[0, \infty)$ men
gränzfunktion inte är kontinuerlig p: $[0, \infty)$ så
konvergens inte likformig p: $[0, \infty)$

$$\text{Så: } \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)) = 0, \lim_{0 < x \rightarrow 0} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = 1$$

ej likformig konvergens p: $[0, \infty)$

⑥ Bestäm $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n(2+x)^n} dx$

Lösning: Vi noterar att

$$x(2+x) = (x+1)^2 - 1 \in \begin{cases} [0, 1) & \text{för } x \in [0, \sqrt{2}-1) \\ \{1\} & \text{för } x = \sqrt{2}-1 \\ (1, \infty) & \text{för } x \in (\sqrt{2}-1, 1] \end{cases}$$

Detta ger

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n(2+x)^n} = \begin{cases} 1 & x \in [0, \sqrt{2}-1) \\ \frac{1}{2} & x = \sqrt{2}-1 \\ 0 & x \in (\sqrt{2}-1, 1] \end{cases} \equiv s(x)$$

Såsom en dominerad konvergens kan tillämpas.

Majorerande funktion ges av $g(x) = 1, x \in [0, 1]$

$$\int_0^1 s(x) dx = \sqrt{2}-1, \int_0^1 s_n(x) dx \text{ Riemann integral existerar}$$

$$\text{för } n=1, 2, \dots \text{ Di } s_n(x) = \frac{1}{1+x^n(2+x)^n} \text{ kontinuerlig p: } [0, 1]$$

