MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2014-04-22, TID(8.30-12.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Emil Gustavsson, 0703-088304

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen

$$x(1-x)y' - y = \frac{x}{1-x}, \quad x \in (0,1).$$

Visa att varje lösning har exakt ett minimum i $(0,1)$.

(7p)

2. Avgör om gränsvärdet

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+2y^2+2z^2-2yz}{2x^2+2y^2+z^2-2xy}$$

existerar.

(7p)

3. Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$$

för $a > 0$.

(7p)

4. För vilka reella tal x är serien

$$\Sigma_{k=0}^{\infty} \frac{1+k^2}{2^k k!} x^k$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent samt beräkna seriens summa för de x för vilka serien konvergerar.

(7p)

5. (a) Avgör om följden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ där

$$a_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^6+1}} + = \frac{n^2}{\sqrt{n^6+2}} + \ldots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6+n}}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

är konvergent, och om så är fallet beräkna dess gränsvärde.

(4p)

(b) Betrakta

$$f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx}}, \;\; x \in [0,2], \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Visa att funktionsföljden $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar punktvis men inte likformigt på $[0,2]$.

(4p)

6. Avgör om serien

$$\Sigma_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 k} \cos(\frac{\pi k^2}{k+1})$$

konvergerar.

(8p)

7. Formulera och bevisa integralkriteriet för positiva serier.

(8p)

8. Låt I vara ett intervall och antag att $a_n(x) > 0$ för $x \in I$ och $n = 1, 2, 3, \ldots$ samt att $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ konvergerar likformigt på I. Visa att om $|b_n(x)| \leq a_n(x)$ för $x \in I$ och $n = 1, 2, 3, \ldots$ så konvergerar $\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ likformigt på I.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK