MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2014-08-21, TID(8.30-12.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Christoffer Standar, 0703-088304

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen

$$y''' + 4y'' + 5y' = x(1 + e^{-x}).$$

(8p)

2. Beräkna

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{\ln x}$$

då funktionen $y(x)$ satisfierar

$$(x^2 + x)y' + y - x = 1.$$

(8p)

3. Beräkna

$$\lim_{x\to\infty} e^x(\ln(1 + e^x) - x).$$

(7p)

4. För vilka reella tal x är serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k^2}}{k^{k^2+2}} x^k$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(7p)

5. För vilka reella tal a konvergerar serien

$$\Sigma_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\Sigma_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \cdot n \ln n}?$$

(8p)

6. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{n\sin(nx)}{1+x^2}\,dx.$$

(6p)

7. Antag att

   (a) $f:[-1,1]\to[-1,1]$ samt att

   (b) f är Lipschitzkontinuerlig med Lipschitskonstanten $k<1$, dvs

$$|f(x)-f(y)|\le k|x-y| \quad \text{alla } \ x,y\in[-1,1].$$

   Visa att

   (a) det finns ett entydigt bestämt $\alpha\in[-1,1]$ sådant att

$$f(\alpha)=\alpha,$$

   (b) för varje $x_0\in[-1,1]$ gäller att följden $(x_n)_{n=1}^\infty$, där $x_{n+1}=f(x_n)$, $n=0,1,2,\dots$ konvergerar mot fixpunkten α för f, samt att

   (c)

$$\begin{cases} |x_n-\alpha|\le \frac{k^n}{1-k}\,|x_1-x_0| \\ \\ |x_n-\alpha|\le \frac{k}{1-k}\,|x_n-x_{n-1}| \end{cases} \qquad n=1,2,3,\dots$$

(8p)

8. Antag att $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k,\dots$ är en avtagande följd med $\lim_{k\to\infty}\alpha_k=0$. Antag att $a_1,a_2,\dots,a_k,\dots$ är en följd av reella tal (kan ha olika tecken) och att det finns ett reellt tal M sådant att

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|<M$$

   för $n=1,2,\dots$. Visa[1] att

$$\Sigma_{k=1}^\infty \alpha_k a_k$$

   konvergerar.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

[1]Tips: Sätt $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, $n=1,2,\dots$, och notera att

$$\alpha_1a_1+\ldots+\alpha_na_n=\ldots=s_1(\alpha_1-\alpha_2)+\ldots+s_{n-1}(\alpha_{n-1}-\alpha_n)+s_n\alpha_n.$$