MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2015-01-14, TID(14.00-18.00)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Peter Kumlin, 7723532

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

OBS:	Ange linje samt personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* inlämnat blad. Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen
$$\begin{cases} y'' - y = e^x(x + e^{-x}) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$
(7p)

2. Lös differentialekvationen
$$\begin{cases} y' = (x+y)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
t. ex. genom att införa en ny variabel $z(x) = x + y(x)$.
(6p)

3. Beräkna
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x \cdot \sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}.$$
(6p)

4. För vilka reella tal x är serien
$$\Sigma_{k=1}^{\infty}(\sqrt[k]{k} - 1)(\frac{x}{2})^k$$
absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent?
(6p)

5. För vilka reella tal a konvergerar serien
$$\Sigma_{k=2}^{\infty}\frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k-2}}{k^a} \quad ?$$
(6p)

6. Avgör om funktionsserien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k}$$

är likformigt konvergent på $[0, 1]$.

(5p)

7. Formulera och bevisa Leibniz konvergenskriterium.

(6p)

8. Bevisa följande påståenden:

   (a) Antag att

      i. $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ samt att

      ii. f är Lipschitzkontinuerlig med Lipschitskonstanten $k < 1$, dvs

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \text{alla } \; x, y \in [-1, 1].$$

   Visa att

      i. det finns ett entydigt bestämt $\alpha \in [-1, 1]$ sådant att

$$f(\alpha) = \alpha,$$

      ii. för varje $x_0 \in [-1, 1]$ gäller att följden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, där $x_{n+1} = f(x_n)$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$, konvergerar mot fixpunkten α för f.

   (b) Antag att

      i. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ samt att

      ii. f är Lipschitzkontinuerlig med Lipschitskonstanten $k < 1$, dvs

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \text{alla } \; x, y \in \mathbb{R}.$$

   Visa att

      i. det finns ett entydigt bestämt $\alpha \in \mathbb{R}$ sådant att

$$f(\alpha) = \alpha,$$

      ii. för varje $x_0 \in \mathbb{R}$ gäller att följden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, där $x_{n+1} = f(x_n)$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$, konvergerar mot fixpunkten α för f.

(4+4p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK