MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2016-01-15, TID(14.00-18.00)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt:

Besökstider: ca 15.00 och 17.00

OBS:	Ange linje samt personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* inlämnat blad. Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' + y = x^2 + (x+1)\cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

(7p)

2. Lös differentialekvationen

$$y' = x \tan y$$

med begynnelsevillkoret $y(0) = \frac{\pi}{6}$.

(6p)

3. Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}.$$

(6p)

4. Avgör om serien

$$\Sigma_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k (\ln \ln k)^2}$$

konvergerar.

(6p)

V.G.V.

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\Sigma_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k 2^k \ln k} (x-2)^{2k}$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(6p)

6. Sätt $f_n(x) = (\cos x)^n$, $x \in [0, \pi]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Visa att

   (a) $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ konvergerar punktvis men inte likformigt på $[0, \frac{\pi}{2}]$, och att
   (b) $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ inte konvergerar punktvis på $[0, \pi]$.

   Avgör om

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} |f_n(x)| \, dx$$

   existerar eller ej.

(7p)

7. Formulera och bevisa Leibniz konvergenskriterium för alternerande serier.

(6p)

8. Antag att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är två talföljder där $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ då $n \to \infty$. Antag vidare att $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är strängt avtagande och att gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$$

   existerar, kalla gränsvärdet $A \in \mathbb{R}$. Visa att gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

   existerar och är lika med A.

(6p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK