MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2016-08-18, TID(8.30-12.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Åsa Fahlander 5325

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen
$$\begin{cases} y'' - 9y = 6\cosh(3x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$
(7p)

2. Lös differentialekvationen
$$y' = \frac{5y - x - 5}{5x - y + 1}.$$
Tips: Gör variabelbytet $z(x) = \frac{y(x)-1}{x}$.
(6p)

3. Beräkna
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2+3e^x)}{\sqrt{x^2-4}}.$$
(6p)

4. För vilka $p \in \mathbb{R}$ konvergerar serien
$$\Sigma_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{2}-1)^p?$$
(6p)

V.G.V.

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^{1+\frac{1}{2k}}} (x+2)^{2k}$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(6p)

6. Låt talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara given av $a_1 = a \neq 0$ och

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{a_n}{2}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Avgör för vilka $a \neq 0$ som talföljden konvergerar, och för dessa fall beräkna talföljdens gränsvärde.

(6p)

7. Formulera och bevisa Leibniz konvergenskriterium.

(6p)

8. Antag att $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är en avtagande följd med $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Antag vidare att $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ är en följd av reella tal (inget antagande om tecken) sådan att

$$|b_1 + b_2 + \ldots + b_n| \leq A, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

för något positivt reellt tal A. Visa att serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

konvergerar[1]. Vad kan sägas om konvergensen för serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

då $a_n = \frac{1}{n}$ och $b_n = \sin(n)$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$? Bevisa ditt påstående.

(4+3p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

[1] Tips: Sätt $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ och uttryck partialsummorna till $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ i termer av a_k och S_k