MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2017-04-11, TID(8.30-12.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Peter Kumlin 3532
Besökstid: ca 10.00

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Betrakta differentialekvationen

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + ay^{(2)} - 6y' + 2y = e^{-x}$$

där $a \in \mathbb{R}$. Givet att

$$y(x) = (A + Bx + C\cos x + D\sin x)e^{x}$$

löser motsvarande homogena differentialekvation för varje val av reella konstanter A, B, C och D, lös (för detta val av a) differentialekvationen

$$\begin{cases} y^{(4)} - 4y^{(3)} + ay^{(2)} - 6y' + 2y = e^{-x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y^{(3)}(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x+y}{2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(5p)

3. Bestäm det största heltal n för vilket

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \cos x}{x^n}$$

existerar samt beräkna gränsvärdet i detta fall.

(6p)

4. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right).$$

(6p)

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{n^n}+(1+\frac{1}{n})^{n^2}\right)x^n$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(6p)

6. Antag att $x_n \geq 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Antag vidare att talföljden

$$x_n + \frac{1}{x_n},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

konvergerar. Visa att också talföljden x_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ måste konvergera[1].

(7p)

7. Formulera och bevisa fixpunktssatsen.

(6p)

8. Antag att I är ett öppet intervall och att $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$ är en funktionsföljd av kontinuerligt deriverbara funktioner på I. Antag vidare att $s_n \to s$ punktvis på I och att $s_n' \to f$ likformigt på I. Visa att s är en kontinuerligt deriverbar funktion på I och att $s' = f$. Motivera väl!

(7p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK

[1] Notera att villkoret $x_n \geq 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ inte kan ersättas med $x_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Betrakta nämligen för $0 < a < 1$ följden

$$a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}, a, \frac{1}{a}, \ldots$$