MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Matematisk analys, fortsättningskurs F/TM, TMA976, 2017-08-17, TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Malin Palö Forsström, ankn 5325
Besökstid: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y'' + y = 2\sin(x)\cdot\cos(2x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(7p)

2. Lös differentialekvationen

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(x+y)^2}{2} \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(5p)

3. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma_{k=0}^{n-1}\ (x+\frac{1}{n})^k$$

för $x \in (0,1)$.

(6p)

4. Beräkna

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^x - 1}{x\ln x}.$$

(6p)

V.G.V.

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^{2n}$$

är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(6p)

6. Antag att $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n > 1$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$, är en växande divergent följd. Visa att

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{s_n \ln^2 s_n}$$

konvergerar.

(7p)

7. Formulera och bevisa fixpunktssatsen.

(6p)

8. Avgör vilka av följande påståenden som är sanna eller falska. Ge bevis respektive motexempel.

Påstående 1 Antag att $s_n(x)$, $I = [0, 1]$ och $n = 1, 2, 3, \ldots$, är en följd av kontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt på I. Då måste (den punktvisa) gränsfunktionen vara kontinuerlig på I.

Påstående 2 Antag att $s_n(x)$, $I = [0, 1]$ och $n = 1, 2, 3, \ldots$, är en följd av diskontinuerliga funktioner som konvergerar likformigt på I. Då måste (den punktvisa) gränsfunktionen vara diskontinuerlig på I.

(7p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK