MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa
Telefon: Daniel Lindqvist, 0709-458192
2000–10–20 kl. 14.15–18.15

Tentamen i Matematiska metoder fk, E2, del A, TMA980a

OBS! Betygsgränser: 20p=3, 30p=4, 40p=5.
OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Bestäm en ortogonalmatris Q och ange en diagonalmatris Λ sådana att $\Lambda = Q^T A Q$, där $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. (9p)

2. Ange en ON-bas för spannet, (eller linjära höljet), av vektorerna $(1,0,-1)$, $(2,1,3)$, $(3,1,2)$ och $(-1,2,0)$ i $\mathbf{R}^3$. (8p)

3. Låt U_1 och U_2 vara två underrum i $\mathbf{R}^4$ givna av
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{respektive} \quad \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$
Finn en bas för $U_1 + U_2 = \{u + v : \ u \in U_1, \ v \in U_2\}$. (8p)

4. Antag att $u_1, \ldots, u_m$ är linjärt oberoende vektorer i ett vektorrum V och att $v \in V$ ej tillhör det underrum U som genereras av $u_1, \ldots, u_m$. Visa att $u_1, \ldots, u_m, v$ är linjärt oberoende. (8p)

5. Finn den allmänna lösningen till följande system av differentialekvationer,
$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) - 2x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - 2x_3(t) + e^t \\ x_3'(t) = -2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \end{cases}.$$
(8p)

6. Låt $A = L_1 U_1$ där
$L_1 = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix}$ och $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, där diagonalelementen i L_1 är nollskilda men annars inga ytterligare krav på L_1 och U_1 än att de är, just, nedåt triangulär respektive uppåt triangulär. Finn ytterligare en sådan faktorisering, $A = L_2 U_2$.

   Antag att A har en LDU-faktorisering och ge ytterligare krav på L, D och U så att för sådana L, D och U är LDU-faktorisering av A entydig.

   Om A dessutom är symmetrisk, visa att $A = LDL^T$. (9p)

VA