1. Egenvärden: $0 = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$ $-\lambda(\lambda^2-9) \Rightarrow \lambda_1=-3, \lambda_2=0, \lambda_3=3$. Egenvektorer:

$$\lambda_1=-3: \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2=0: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_3=3: \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } \Lambda = Q^TAQ = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}.$$

---

2. Låt $U = V(A)$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ så en bas U är t.ex. kolonn 1, 2 och 4, så $\dim U = 3$ och $U \subseteq \mathbb{R}^3$ så $U = \mathbb{R}^3$. Vi kan då välja standardbasen som ON-bas för U. Annars: Låt $a=(1,0,-1), b=(2,1,3), c=(-1,2,0)$. Gram-Schmidt $\Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\ \tilde{e}_2 = b-(e_1^Tb)e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \\ 5/2 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{54}}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\tilde{e}_3 = c-(e_1^Tc)e_1-(e_2^Tc)e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{54}(-1)\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{22}{54}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_3 =$ $\frac{1}{\sqrt{27}}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Så $\{e_1,e_2,e_3\}$ är ON-bas för U.

---

3. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ så vektorerna x i U_1 ges av $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s_1\begin{pmatrix} -11 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och U_2 av $x = s_2\begin{pmatrix} -13 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\therefore U_1+U_2 = V(A) \text{ där } A = \begin{pmatrix} -11 & -3 & -13 & -6 \\ -3 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 11 & 3 & 13 & 6 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim}$$

$$\overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \therefore \text{En bas för } U_1+U_2 \text{ ges av } \left\{\begin{pmatrix} -11 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

---

4. Se boken.

---

5. Lös $x' = Ax+f$ för $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f = e^t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Egenvärden för A: $0 = \det(A-\lambda I) =$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ -1-\lambda & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$= -(\lambda+1)(\lambda(\lambda-3)+2) = -(\lambda+1)(\lambda^2-3\lambda+2) = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$. Det ses lätt att $\lambda_1 = 1$ har egenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 1$ har $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\lambda_3 = 2$ har $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Låt $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ (via Gauss-Jordan) $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ och $S^{-1}AS = \Lambda \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Låt nu $x = Sy \Rightarrow x' = Sy'$ så $y' = S^{-1}ASy + S^{-1}f = \Lambda y + S^{-1}f = \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_2 \\ 2y_3 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Lös alltså $\begin{cases} y_1' = -y_1 - e^t \\ y_2' = y_2 + e^t \\ y_3' = 2y_3 - e^t \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(e^t y_1) = -e^{2t} \\ \frac{d}{dt}(e^{-t} y_2) = 1 \\ \frac{d}{dt}(e^{-2t} y_3) = -e^{-t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -\frac{1}{2}e^t + c_1 e^{-t} \\ y_2 = (t+c_2)e^t \\ y_3 = e^t + c_3 e^{2t} \end{cases} \quad \text{dvs } y = e^t \begin{pmatrix} -1/2 \\ t+c_2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x = Sy = e^t S \begin{pmatrix} -1/2 \\ t+c_2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 e^{-t} S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^t((t+c_2) S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) +$$

$$c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (t+c_2)e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

---

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\ell_{21}}{\ell_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{\ell_{31}}{\ell_{11}} & \frac{\ell_{32}}{\ell_{22}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ell_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \ell_{33} \end{pmatrix} U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\ell_{21}}{\ell_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{\ell_{31}}{\ell_{11}} & \frac{\ell_{32}}{\ell_{22}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{11}u_{21} & \ell_{11}u_{13} \\ 0 & \ell_{22} & \ell_{22}u_{23} \\ 0 & 0 & \ell_{33} \end{pmatrix}$.

Om $A = LDU$ där L nedåt triangulär med ettor på diagonalen, U uppåt triangulär med ettor på diagonalen och D diagonal med enbart nollskilda element på diagonalen så är LDU-faktoriseringen av A entydig. För att se detta, antag $L_1D_1U_2 = L_2D_2U_2$ för sådana L_i, D_i och U_i, $i = 1, 2$. Då detaminanterna är produkten av diagonalelementen så existerar inverserna. Genom Gauss-Jordan, för att finna L_i^{-1}, ses att L_i^{-1} är av samma typ (dvs nedåt triang. med ettor på diagonalen), och detsamma (dvs inversen av samma typ) gäller D_i och U_i. Nu är $L_2^{-1}L_1$ åter nedåt diagonal med ettor på diagonalen och $U_2U_1^{-1}$ uppåt triangulär med ettor på diagonalen. Vidare är diagonalen av produkten $(L_2^{-1}L_1)D_1$ precis diagonalen av D_1 och detsamma gäller $D_2U_2U_1^{-1}$ och D_2 och då $L_2^{-1}L_1D_1 = D_2U_2U_1^{-1}$ så har vi alltså $D_1 = D_2 \therefore L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$, dvs $L_2^{-1}L_1$ och $U_2U_1^{-1}$ är både nedåt och uppåt triangulära, dvs de är diagonala och eftersom diagonalen är bara ettor har vi $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I \Rightarrow L_1 = L_2$ och $U_2 = U_1$ vilket avslutar beviset. Slutligen ser man att $LDU = A = A^T = (LDU)^T = U^TD^TL^T$ och entydighet ger $L = U^T$ och $U = L^T$ så $A = LDL^T$ för symmetrisk A som har entydig LDU-faktorisering.