1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv A' \therefore$ bas för $V(A)$ ges av $\{(1,3,1),(1,1,3)\}$. I Gram-Schmidt-ortogonalisering, låt $\tilde{e}_1 = (1,3,1)$ och $\tilde{e}_2 = (1,1,3) + \alpha(1,3,1)$ där α väljs s.a. $\langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \rangle = 0$ dvs $\alpha = -\frac{\langle (1,1,3), \tilde{e}_1 \rangle}{\|\tilde{e}_1\|^2} = \frac{-7}{11} \Rightarrow \tilde{e}_2 = \frac{2}{11}(2,-5,13) \therefore e_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,3,1),\ e_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}\sqrt{11}}(2,-5,13)$ är en ON-bas för $V(A)$. För $N(A) : Ax = 0 \Leftrightarrow A'x = 0 \Leftrightarrow x_4 = t, x_3 = -2t, x_2 = s, x_1 = -2s \Leftrightarrow x = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ så $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0,0),\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,0,-2,1)$ är en ON-bas för $N(A)$.

---

2. Överbestämt ekv.syst. att lösa är $A\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} = b$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Nu är $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^TA = 5\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^Tb = 10\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Lös alltså $A^TA\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} = A^Tb \Leftrightarrow$ $5\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ \ell \end{pmatrix} = 10\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 11 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \leftarrow \\ \boxed{-3} \end{array} \overset{RE}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow k = 0,\ \ell = 2$; dvs linjen som söks är $y = 2$.

---

3. Egenvärdena λ för A fås av $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & -5-\lambda & 7 \\ -2 & 7 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ -2 & -12-\lambda & 7 \\ -2 & 12+\lambda & -5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 2-\lambda \\ -2 & 12+\lambda & -5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-6)(\lambda+12)$ så $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -12$.

Egenvktorer: $\lambda_1 = 6$: Lös $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -11 & 7 \\ -2 & 7 & -11 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -9 & 9 \\ 0 & 9 & -9 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \neq 0$.

$\lambda_2 = 0$: Lös $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 7 \\ -2 & 7 & -5 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \neq 0$

$\lambda_3 = -12$: Lös $\begin{pmatrix} 16 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & 7 \\ -2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ -8 & 28 & 28 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \neq 0$.

$$\therefore Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix},\ \Lambda = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

---

4. λ egenvärde och x egenvektor för $A \Leftrightarrow Ax = \lambda x, x \neq 0$. Då A Hermitesk, dvs $A^H = A$, får vi $\lambda x^H x = x^H(\lambda x) = x^H A x = x^H A^H x = (Ax)^H x = (\lambda x)^H x = \bar{\lambda} x^H x$. Då $x^H x = \|x\|^2 > 0$ ty $x \neq 0$, får vi $\lambda = \bar{\lambda}$, dvs λ reell.

---

5. $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$. Gram-Schmidt $\Rightarrow q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{q}_2 = a_2 - (q_1^T a_2)q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $q_1^T a_2 = 1/\sqrt{2}$, $q_2^T a_2 = -3/\sqrt{6}$. Vidare är $\tilde{q}_3 = a_3 - (q_1^T a_3)q_1 - (q_2^T a_3)q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $q_1^T a_3 = 0$, $q_2^T a_3 = -2/\sqrt{6}$.

Vidare är $q_3^T a_3 = 1/\sqrt{3}$ $\therefore$ $A = QR$ där $Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ och $R = \begin{pmatrix} q_1^T a_1 & q_1^T a_2 & q_1^T a_3 \\ 0 & q_2^T a_2 & q_2^T a_3 \\ 0 & 0 & q_3^T a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ & -3/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ & & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Nu är $P = q_1 q_1^T + \ldots + q_3 q_3^T$ och också $P = A(A^T A)^{-1}A^T = A(R^T Q^T QR)^{-1}A^T = A(R^T R)^{-1}A^T$. I vilket fall som så får vi $P = I$; som också, lättare, inses av att A har tre lin. ober. kolonner så $V(A)$ 3-dim underrum av $\mathbb{R}^3$, så $V(A) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow P = I$.

---

6. Av spektralsatsen följer att det för $\mathbb{R}^n$ finns en ON-bas $\{f_1, \ldots, f_n\}$ av egenvektorer till A med tillhörande egenvärden $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Låt för $x \in \mathbb{R}^n$, $(x_1^f, \ldots, x_n^f)$ vara koordinaterna för x i basen $\{f\}$ och låt λ egenvärde för A med tillhörande egenvektor x. Då gäller $0 < \lambda\|x\|^2 = \langle Ax, x\rangle = |\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\|\|x\| \leq \|x\|^2$ $\therefore$ $0 < \lambda \leq 1$. Vi har nu med $x = \sum_{i=1}^n x_i^f f_i$ att $Ax = \sum_{i=1}^n x_i^f \lambda_i f_i$ och följaktligen

$$\begin{aligned}
\|(A^3 - 2A)x\|^2 &= \|\sum_{i=1}^n x_i^f \lambda_i^3 f_i - 2\sum_{i=1}^n x_i^f \lambda_i f_i\|^2 \\
&= \langle \sum_{i=1}^n x_i^f(\lambda_i^3 - 2\lambda_i)f_i, \sum_{j=1}^n x_j^f(\lambda_j^3 - 2\lambda_j)f_j\rangle = \sum_{i,j} x_i^f x_j^f (\lambda_i^3 - 2\lambda_i)(\lambda_j^3 - 2\lambda_j)\langle f_i, f_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n (x_i^f)^2(\lambda_i^3 - 2\lambda_i)^2\|f_i\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^f)^2(\lambda_i^3 - 2\lambda_i)^2 \leq \max_{1\leq i\leq n}(\lambda_i^3 - 2\lambda_i)^2\|x\|^2.
\end{aligned}$$

$\therefore$ $\|(A^3 - 2A)x\| \leq \max_{1\leq i\leq n}|\lambda_i^3 - 2\lambda_i|\|x\|$. Finn nu maximum för $|t^3 - 2t|$ på intervallet $(0, 1]$. Med $f(t) = t^3 - 2t$ har vi $0 = f'(t) = 3t^2 - 2 \Rightarrow t = {\scriptstyle(\pm)}\sqrt{2/3}$. Teckenstudietabell:

x	0		$\sqrt{2/3}$		1
f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$f(\sqrt{2/3})$	$\nearrow$	-1

ger att $\max_{0<t\leq 1}|t^3 - 2t| = f(\sqrt{2/3}) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$.