MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola

Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa
Telefon: Robert Berman, 0740-459022
2002–01–15 kl. 14.15–18.15

Tentamen i Matematiska metoder fk, E2/Ex, del A, TMA980a/TMA215

OBS! Betygsgränser: 20p=3, 30p=4, 40p=5.

OBS! Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Finn en LU-faktorisering av matrisen A, där L och U är nedåt respektive uppåt triangulära matriser och L har ettor på diagonalen, då

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

(8p)

2. Låt $U = \text{span}\{u_1, u_2\} \subset \mathbf{R}^3$ där $u_1 = (-1, 0, 2)$, $u_2 = (1, 1, -2)$. Skriv vektorn $v = (-2, 3, 4)$ som en summa $v = u + u^\perp$ där $u \in U$ och $u^\perp \in U^\perp$.

(8p)

3. Finn ortogonalmatris Q och diagonalmatris Λ sådana att $Q^T A Q = \Lambda$ då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(9p)

4. Newtons rörelselag säger att ett föremål vertikalt kastat med hastigheten v m/s (meter per sekund) når höjden $h = vt - \frac{1}{2}gt^2$ meter efter t sekunder. Här är g gravitationskonstanten. Följande värden på h och t observerades i ett försök. Anpassa med minstakvadratmetoden, och ge en uppskattning av v och g, ett kvadratiskt uttryck $h = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$, till försöksvärdena:

t	1	2	3	4
h	45	80	105	120

(8p)

5. Låt U, V, W vara godtyckliga underrum i $\mathbf{R}^n$. Visa att
a) $(U^\perp)^\perp = U$.
Låt vidare summan $V + W \equiv \{v + w \,|\, v \in V,\ w \in W\}$. Visa att
b) $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$,
c) $(V \cap W)^\perp = V^\perp + W^\perp$. (5+2+2p)

6. Låt $\langle p, q \rangle \equiv \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$. Då är $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en skalärprodukt på det linjära rummet $\mathcal{P}_3$ av polynom av grad ≤ 3. Låt V vara skalärproduktrummet $\mathcal{P}_3$ med skalärprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definierad ovan. Visa att $\{1, x, x^2, x^3\}$ är en bas för $\mathcal{P}_3$. Låt $q_0(x), \ldots, q_k(x)$ vara polynom sådana att $\{q_i(x)\}_{i=0}^k$ är en bas för V och parvis ortogonala. Vad måste i så fall k vara? En sådan bas $\{q_i(x)\}_{i=0}^k$ kallas en ortogonalbas. Finn en ortogonalbas för V. (3+1+4p)

VA