Lösning Mat. Metoden fk, del A E2/Ex TMA980a/TMA215 2002-08-22

1. $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\1&0&1&0&1\\3&-1&4&0&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\boxed{-1}\\ \leftarrow\\ \\ \end{matrix}\ \begin{matrix}\boxed{-3}\\ \\ \leftarrow\end{matrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&1&-1&-1&1\\0&2&-2&-3&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \boxed{-2}\\ \leftarrow\end{matrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\0&1&-1&-1&1\\0&0&0&-1&0\end{pmatrix}$

Så kolomnerna 1, 2 och 4 i A utgör en bas för $V(A)$, dvs $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ är en bas för $V(A)\subseteq\mathbb{R}^3$. Alltså är $V(A)=\mathbb{R}^3\Rightarrow V(A)^\perp=\{0\}$.

---

2. Egenvärden: $0=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda&0&2\\0&1-\lambda&-2\\2&-2&-\lambda\end{vmatrix}=-(1+\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&-2\\-2&-\lambda\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}0&1-\lambda\\2&-2\end{vmatrix}$

$=-\lambda(\lambda^2-9)\Rightarrow\lambda_1=-3,\lambda_2=0,\lambda_3=3.$

Egenvektorer: $\lambda_1=-3:\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&-2\\2&-2&3\end{pmatrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=s\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$;

$\lambda_2=0:\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=s\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix};\lambda_3=3:\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&-2&-2\\2&-2&-3\end{pmatrix}\overset{RE}{\sim}$

$\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow x=s\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\therefore Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&2&-2\\-2&1&2\end{pmatrix}$ och $\Lambda=Q^TAQ=\begin{pmatrix}-3&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}$.

---

3. Vi ser att $U_i=N(A_i)=\{x\in\mathbb{R}^4:A_ix=0\}\ i=1,2$ och $A_1=\begin{pmatrix}1&-2&0&1\\3&-4&-1&2\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}2&-2&3&4\\0&1&1&-2\end{pmatrix}$,

$A_1\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&2&-1&-1\end{pmatrix}$ så $A_1x=0$ har lösn. $x=s_1\begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$. Vidare ser vi pss att $A_2x=0$

har lösn. $x=s_2\begin{pmatrix}5\\2\\-2\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}$. Dvs en bas för U_1 ges av (2, 1, 2, 0) och (0, 1, 0, 2) och en bas för U_2 ges av $(5,2,-2,0)$ och (0, 2, 0, 1). Därför är då $U_1+U_2=$ spannet av alla dessa (bas)-vektorer$=V(A)$

där $A=\begin{pmatrix}2&0&5&0\\1&1&2&2\\2&0&-2&0\\0&2&0&1\end{pmatrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}2&0&5&0\\1&1&2&2\\0&0&-7&0\\0&2&0&1\end{pmatrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\1&1&2&2\\0&0&1&0\\0&2&0&1\end{pmatrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&2&-1&4\\0&0&1&0\\0&2&0&1\end{pmatrix}\overset{RE}{\sim}$

$\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&2&-1&4\\0&0&1&0\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\overset{RE}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&3&-2\\0&2&-1&4\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$

så en bas för U_1+U_2 ges av (2, 1, 2, 0), (0,1, 0, 2), (5, 2, -2, 0) och (0, 2, 0, 1).

---

4. Antag motsatsen till det som ska visas, dvs antag att $u_1, \ldots, u_m, v$ linjärt beroende. Då gäller $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m + \beta v = 0$ där inte alla av $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta$ är 0. Antag att $\beta \neq 0$. Då gäller att $v = -\frac{1}{\beta}(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m) \in$ spannet $\{u_1, \ldots, u_m\} \equiv U$, i strid med förutsättning i uppgiften. Alltså måste $\beta = 0 \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m + 0 \cdot v = 0$, dvs $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$. Då inte alla $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta$ är noll men $\beta = 0$ så är alltså ej alla $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ noll. Dvs vi har $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$ men alla α_i är ej 0. Alltså är ej $u_1, \ldots, u_m$ linjärt oberoende i strid med förutsättning. Alltså var vårt antagande fel, vilket avslutar beviset.

---

5. $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ Gram-Schmidt $\Rightarrow q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{q}_2 = a_2 - (q_1^T a_2) q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $q_1^T a_2 = 1/\sqrt{2}$, $q_2^T a_2 = -3/\sqrt{6}$. Vidare är $\tilde{q}_3 = a_3 - (q_1^T a_3) q_1 - (q_2^T a_3) q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $q_1^T a_3 = 0$, $q_2^T a_3 = -2/\sqrt{6}$. Vidare är $q_3^T a_3 = 1/\sqrt{3} \therefore A = QR$ där $Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ och $R = \begin{pmatrix} q_1^T a_1 & q_1^T a_2 & q_1^T a_3 \\ 0 & q_2^T a_2 & q_2^T a_3 \\ 0 & 0 & q_3^T a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ & -3/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ & & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Nu är dessutom $P = q_1 q_1^T + q_2 q_2^T + q_3 q_3^T$ och också $P = A(A^T A)^{-1} A^T = A(R^T Q^T Q R)^{-1} A^T = A(R^T R)^{-1} A^T$. I villket fall som så får vi $P = I$; som också, lättare, inses av att A har tre lin. ober. kolonner så $V(A)$ är 3-dim. underum i $\mathbb{R}^3$ så $V(A) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow P = I$.

---

6. a) $\exists$ inverterbar matris T s.a. $T^{-1} A T = A' \Rightarrow \det(A' - \lambda I) = \det(T^{-1} A T - \lambda I) = \det(T^{-1}(A - \lambda I) T) = \det T^{-1} \det(A - \lambda I) \det T = (1/\det T) \det(A - \lambda I) \det T = \det(A - \lambda I)$ vilket visar att egenvärdena för A och A' är desamma.

   b) Då för skalärer α, β och egenvektorer u, v för egenvärdet λ, vi har att $A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v = \alpha \lambda u + \beta \lambda v = \lambda(\alpha u + \beta v)$ ser vi att $\alpha u + \beta v$ är egenvektor för λ. Dvs egenvärdesrummet för λ är ett linjärt rum.

   c) Antag att dimensionen av egenvärdesrummet för $\lambda \geq 2$. Då finns minst två lin. ober. egenvektorer e_1 och e_2 för λ, dvs $A e_i = \lambda e_i$, $i = 1, 2$. Komplettera till en bas $e \equiv \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ för $\mathbb{R}^n$. I denna bas e har A representationen

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Ae_1 & Ae_2 & \ldots & Ae_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \approx a_{1,1} & \ldots & \approx a_{1,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \approx a_{n-2,1} & \ldots & \approx a_{n-2,n-2} \end{pmatrix}$$

   Egenvärdena $\tilde{\lambda}$ för $\tilde{A}$ ges av $0 = \det(\tilde{A} - \tilde{\lambda} I) = \begin{vmatrix} \lambda - \tilde{\lambda} & & & \\ & \lambda - \tilde{\lambda} & & \\ & & \boxed{\approx A - \tilde{\lambda} I} & \end{vmatrix} = (\lambda - \tilde{\lambda})^2 \det(\approx A - \tilde{\lambda} I) \Rightarrow \tilde{\lambda} = \lambda$ är ett egenvärde av multiplicitet minst 2, vilket är en motsägelse.