1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{2} \\ \leftarrow (-) \\ \end{matrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \boxed{2} \\ \leftarrow (-) \end{matrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv DU.$

Vi ser också att $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ och då A symmetrisk gäller $L = U^T$ (som vi också ser direkt).

---

2. Då $(1,1)$ är invariant under F och $(1,-1)$ avbildas på origo och är ortogonal mot $(1,1)$ så är F ortogonalprojektion på linjen med riktningsvektor $(1,1)$. Vidare är $(1,0) = \frac{1}{2}((1,1)+(1,-1))$ och $(0,1) = \frac{1}{2}((1,1)-(1,-1))$ så $F(1,0) = F(\frac{1}{2}((1,1)+(1,-1))) = \frac{1}{2}(F(1,1)+F(1,-1)) = \frac{1}{2}(1,1) = \frac{1}{2}(1,0)+\frac{1}{2}(0,1)$ då ju F linjär. Pss är $F(0,1) = \frac{1}{2}(F(1,1)-F(1,-1)) = \frac{1}{2}(1,1) = \frac{1}{2}(1,0)+\frac{1}{2}(0,1)$.

Alltså är matrisen A för F i standardbasen $A = \begin{pmatrix} | & | \\ F(e_1) & F(e_2) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

---

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{1} \\ \\ \leftarrow \end{matrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \boxed{-5} \\ \leftarrow \end{matrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$. Så en bas för $V(A)$ är t ex kolonn 1, 2 och 4 i A, dvs $\{(1,0,-1),\ (3,1,2),\ (-1,2,0)\}$ är en bas för $V(A)$. Vi löser (det radreducerade) systemet och finner $x = s(1,-1,1,0)$ som lösningar. Dvs $N(A) = \{s(1,-1,1,0) : s \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$, så $\dim N(A)^\perp = 3$. Vi kunde också argumenterat utan att lösa ekv. syst. ty $4 = \dim N(A) + \dim V(A) = \dim N(A) + 3 \Rightarrow \dim N(A) = 1$ enl. dimensionssatsen, varav $\dim N(A)^\perp = 3$.

---

4. $0 = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2 \Rightarrow$ egenvärdena är $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 2$.

Egenvektorer ges av $\lambda_1 = -1 : \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \neq 0$;

$\lambda_2 = 2 : \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad st \neq 0$.

Välj $(1,-1,0)$ som egenvektor. En ytterligare egenvektor $x = (x_1,x_2,x_3)$ för egenvärdet 2 måste dels uppfylla $x_1+x_2+x_3 = 0$ men vi vill också välja den ortogonal mot $(1,-1,0)$ så $0 = x\cdot(1,-1,0) = x_1 - x_2$. Lös alltså $\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = t(1,1,-2)$. Efter normering får vi egenvektorer för $\lambda_1 = -1 : (1,1,1)/\sqrt{3}$, $\quad \lambda_{1,3} = 2 : (1,-1,0)/\sqrt{2},\ (1,1,-2)/\sqrt{6}$.

$$\therefore Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

---

5. $x \in N(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x \perp$ raderna i $A \Leftrightarrow x \perp$ kolonnerna i $A^T \Leftrightarrow x \perp \text{span}\{$kolonnerna i $A^T\} \Leftrightarrow x \perp V(A^T) \Leftrightarrow x \in V(A^T)^\perp$.

---

6. $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$.

För $\lambda = 1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s \neq 0$, egenvektor.

Unitär matris, välj $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow U_1^{-1} A U_1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tag $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vars egenvärden uppfyller $0 = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda \pm 1$.

För $\lambda = 1 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $s \neq 0$, egenvektor.

Tag $U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$ (via Gauss-Jordan) $U_2^{-1} = U_2$. Nu gäller $U_2^{-1} A U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T$, triangulär.