Matematiska Institutionen
CTH & GU

Vilhelm Adolfsson, 772 53 07, vilhelm@math.chalmers.se

Inlämningsuppgift 1 i Linjär algebra för Matematiska Metoder, del A, E2, lp I, 1999

Obligatorisk(a) inlämningsuppgift(er):

1. Låt V vara ett linjärt rum av dimension n. Visa att
   (a) $n+1$ eller fler vektorer i V är alltid linjärt beroende.
   (b) n vektorer i V som är linjärt oberoende är alltid en bas för V.
   (c) n vektorer i V som genererar V är alltid en bas för V.
2. Förklara varför fyra eller fler vektorer i $\mathbf{R}^3$ måste vara linjärt beroende.
3. Låt $\ell_2 = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbf{R}^\infty : (\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2)^{1/2} < \infty\}$. Visa att ℓ_2 är ett underrum i $\mathbf{R}^\infty$.
4. Visa att om en matris har fler kolonner än rader så är kolonnvektorerna linjärt beroende.

Frivillig(a) inlämningsuppgift(er):

1. Finn $PA = LDU$ faktorisering av matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.
2. Låt V vara mängden $\mathbf{R}^2$ försedd med operationerna $\oplus$ och $\odot$ definierade genom
$$\begin{cases} (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1) \\ \alpha \odot (x_1, x_2) = (\alpha + \alpha x_1 - 1, \alpha + \alpha x_2 - 1). \end{cases}$$
   Visa att V med dessa operationer är ett vektorrum. Vad blir nollelementet?
3. Visa att funktionerna x, e^x, xe^x, e^{2x} är linjärt oberoende på $\mathbf{R}$. (Vi tänker oss då att de är vektorer i ngt vektorrum, tex $C(\mathbf{R})$.)
4. Finn en bas för värderummet $\mathrm{V}(A)$, och nollrummet $\mathrm{N}(A)$ till matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, samt ange dim $\mathrm{V}(A)$ och dim $\mathrm{N}(A)$.
5. Beteckna med V mängden av alla reella polynom $p(x)$ av grad ≤ 4 sådana att $p(0) = 0$ och
$$\int_0^1 p(x)\, dx = 0.$$
   Visa att V är ett linjärt rum och ange en bas och dimensionen av V.