Matematiska Institutionen
CTH & GU

Vilhelm Adolfsson, 772 53 07, vilhelm@math.chalmers.se

Lösningsförslag till Inlämningsuppgift 1 i Linjär algebra för Matematiska Metoder, del A, E2, lp I, 1999

Obligatorisk(a) inlämningsuppgift(er):

1. Låt V vara ett linjärt rum av dimension n. Visa att

   (a) $n+1$ eller fler vektorer i V är alltid linjärt beroende.

   Lösning: Detta följer direkt av definitionen av dimension: Ett linjärt rum V har dimensionen n om n är det maximala antalet linjärt oberoende vektorer i V. Så $n+1$ eller fler vektorer i V kan ej vara linjärt oberoende ty det skulle strida mot maximaliteten hos n.

   (b) n vektorer i V som är linjärt oberoende är alltid en bas för V.

   Lösning: En uppsättning vektorer i V är en bas om de är linjärt oberoende och genererar, spänner, V. Om $u_1, \ldots, u_n$ är linjärt oberoende behöver vi bara visa att de spänner V. Så antag att $v \in V$, v godtyckligt. Om $v \notin \text{Span}(u_1, \ldots, u_n)$ så är $u_1, \ldots, u_n, v$ linjärt oberoende, men då är $\dim V \geq n+1 > n$ och detta går inte.

   (c) n vektorer i V som genererar V är alltid en bas för V.

   Lösning: Vi behöver visa att om $u_1, \ldots, u_n$ genererar V så är de oxå linjärt oberoende. Om inte så kan V genereras av $n-1$ vektorer. Enligt Sats 1.3 är då varje uppsättning av fler än $n-1$ vektorer linjärt beroende, så det maximala antalet linjärt oberoende vektorer i V är högst $n-1$. Dvs. $\dim V \leq n-1$, men det går inte.

2. Förklara varför fyra eller fler vektorer i $\mathbf{R}^3$ måste vara linjärt beroende.

   Lösning: Dimensionen av ett vektorrum är det maximala antalet linjärt oberoende vektorer. Dimensionen av $\mathbf{R}^3$ är 3. Alltså måste en uppsättning av fler än 3 vektorer vara linjärt beroende.

3. Låt $\ell_2 = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbf{R}^\infty : (\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2)^{1/2} < \infty\}$. Visa att ℓ_2 är ett underrum i $\mathbf{R}^\infty$.

   Lösning: Vi behöver visa att ℓ_2 är slutet under skalärmultiplikation och addition, där dessa är definierade som i det omgivande linjära rummet $\mathbf{R}^\infty$. Låt $x, y \in \ell_2$ och $c \in \mathbf{R}$. Då är $(\sum_{i=1}^\infty |cx_i|^2)^{1/2} = c(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2)^{1/2}$ så $cx \in \ell_2$. Vidare gäller för godtyckliga reella tal a och b att $0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ som ger att $2ab \leq a^2 + b^2$ och därfor har vi att $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2)$. Vi får följdaktligen att $|x_i + y_i|^2 \leq (|x_i| + |y_i|)^2 \leq 2(|x_i|^2 + |y_i|^2)$ och så har vi $\sum_{i=1}^\infty |x_i + y_i|^2 \leq 2\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 + |y_i|^2 < \infty$, ty $x, y \in \ell_2$. Alltså har vi att $x + y \in \ell_2$. Detta visar att ℓ_2 är ett underrum.

4. Visa att om en matris har fler kolonner än rader så är kolonnvektorerna linjärt beroende.

   Lösning: Låt A vara matrisen av typ $m \times n$ där $m < n$. Då är $\text{rang}(A) = \text{radrang}(A) \leq m < n$ ty radrangen är det maximala antalet linjärt oberoende rader. Antag att kolonnerna är linjärt oberoende. Då är $\text{rang}(A) = n$, vilket är en motsägelse. Alltså måste antagandet att kolonnerna är linjärt oberoende vara fel; dvs kolonnerna är linjärt beroende.

Frivillig(a) inlämningsuppgift(er):

1. Finn $PA = LDU$ faktorisering av matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Lösning: Vi ser att vi behöver byta ut rad 1 som har en nolla i första kolonnen och därför inte kan agera pivotelement. Vi byter genom multiplikation med matrisen P rad 1 och 2 och erhåller $PA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, där $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Genom att subtrahera 1 ggr rad 1 från rad 3 och 4 ggr rad 1 från rad 4 erhåller vi den radekvivalenta $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -10 & -10 \end{pmatrix}$. I denna matris subtraherar vi -3 ggr rad 2 från rad 3 och -10 ggr rad 2 från rad 4. Vi får radekvivalenta $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$. Då U har endast ettor på diagonalen så behöver vi inte 'dividera ut' och alltså kan vi ta $D = I$, enhetsmatris. Det är klart att L måste vara en 4×4-matris för att matrismultiplikation ska vara definierad och ge PA. Från faktorerna vi subtraherat ser vi att i Gausseliminationen ser vi att $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Låt V vara mängden $\mathbf{R}^2$ försedd med operationerna $\oplus$ och $\odot$ definierade genom

$$\begin{cases} (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1) \\ \alpha \odot (x_1, x_2) &= (\alpha + \alpha x_1 - 1, \alpha + \alpha x_2 - 1). \end{cases}$$

Visa att V med dessa operationer är ett vektorrum. Vad blir nollelementet?

Lösning: Det är klart att med dessa definitioner av skalärmultiplikation och addition så är dessa slutna, dvs uppfyller villkor a) och b) i definitionen av ett linjärt rum. Vidare är det klart att villkor 1) är uppfyllt ty $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1) = (y_1 + x_1 + 1, y_2 + x_2 + 1) = (y_1, y_2)) \oplus (x_1, x_2)$. Villkor 2) om associativitet visas på liknande sätt. Vi ser att nollelementet är $(-1, -1)$ ty $(x_1, x_2) \oplus (-1, -1) = (x_1 + (-1) + 1, x_2 + (-1) + 1) = (x_1, x_2)$ och $(-1, -1) \oplus (x_1, x_2) = (x_1, x_2) \oplus (-1, -1) = (x_1, x_2)$ enligt 1). Detta visar villkor 3). För villkor 4) har vi $\alpha \odot (\odot(x_1, x_2)) = \alpha \odot (\beta + \beta x_1 - 1, \beta + \beta x_2 - 1) = (\alpha + \alpha(\beta + \beta x_1 - 1) - 1, \alpha + \alpha(\beta + \beta x_2 - 1) - 1) = (\alpha\beta + \alpha\beta x_1 - 1, \alpha\beta + \alpha\beta x_2 - 1) = (\alpha\beta) \odot (x_1, x_2)$. Villkor 5) och 6) visas på liknande sätt. Villkor 7) är uppfyllt ty $1 \odot (x_1, x_2) = (1 + 1x_1 - 1, 1 + 1x_2 - 1) = (x_1, x_2)$ och $0 \odot (x_1, x_2) = (0 + 0x_1 - 1, 0 + 0x_2 - 1) = (-1, -1)$ som ju är nollelementet så 8) är oxå uppfyllt. Detta visar att vi har ett linjärt rum.

3. Visa att funktionerna x, e^x, xe^x, e^{2x} är linjärt oberoende på $\mathbf{R}$. (Vi tänker oss då att de är vektorer i ngt vektorrum, tex $C(\mathbf{R})$.)

Lösning: Antag att vi har en linjär kombination av vektorerna som ger nollelementet, dvs $c_1 x + c_2 e^x + c_3 x e^x + c_4 e^{2x} = 0$ för varje $x \in \mathbf{R}$. Vi ser att insättning av $x = 0$ ger $c_2 + c_4 = 0$, Vidare får vi efter multiplikation med e^{-2x} att $c_1 x e^{-2x} + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-2x} + c_4 = 0$ och genom att låta $x \to \infty$ får vi $c_4 = 0$ och därmed oxå $c_2 = 0$. Alltså har vi $c_1 x + c_3 x e^x = 0$ för varje $x \in \mathbf{R}$, vilket ger att $c_1 + c_3 e^x = 0$ för varje $x \in \mathbf{R}$ s.a. $x \neq 0$. Derivation ger $c_3 e^x = 0$ och insättning av tex $x = 1$ ger att $c_3 = 0$. Alltså har vi att $c_3 x e^x = 0$ för varje $x \in \mathbf{R}$. Insättning av tex $x = 1$ $c_3 = 0$. Alltsåär alla koefficienter 0 och därmed är funktionerna linjärt oberoende på $\mathbf{R}$.

4. Finn en bas för värderummet $\mathrm{V}(A)$, och nollrummet $\mathrm{N}(A)$ till matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, samt ange $\dim \mathrm{V}(A)$ och $\dim \mathrm{N}(A)$.

Lösning: Elementära radoperationer på A ger

$$A \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{pmatrix} \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv A'.$$

Vi ser att A' är en trappstegsmatris med pivotelement i kolonnerna 1 och 3. Så en bas för $\mathrm{V}(A)$ ges av kolonnerna 1 och 3 i den ursprungliga matrisen A, dvs $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ utgör en bas, så dim $\mathrm{V}(A)$=2. Vidare genom fortsatt radreduktion får vi

$$A \overset{RE}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv A''.$$

Nu gäller att

$$A''x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbf{R},$$

så en bas för $\mathrm{N}(A)$ ges av

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

då dessa vektorer lätt ses vara linjärt oberoende. Så dim $\mathrm{N}(A)$=2. Observera att detta stämmer med dimensionssatsen.

5. Beteckna med V mängden av alla reella polynom $p(x)$ av grad ≤ 4 sådana att $p(0) = 0$ och

$$\int_0^1 p(x)\, dx = 0.$$

Visa att V är ett linjärt rum och ange en bas och dimensionen av V.

Lösning: Vi har

$$V = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 : \; t, a_0, \ldots, a_4 \in \mathbf{R}, p(0) = 0, \int_0^1 p(x)\, dx = 0\}.$$

Vi behöver visa att om $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ och $p, q \in V$ så gäller att $w = \alpha p + \beta q \in V$. Det är klart att w är ett polynom av grad högst 4. Vidare gäller att

$$w(0) = \alpha p(0) + \beta q(0) = 0,$$

och

$$\int_0^1 w(x)\, dx = \alpha \int_0^1 p(x)\, dx + \beta \int_0^1 q(x)\, dx = 0.$$

Det följer att V är ett linjärt rum; ett underrum till rummet av alla reella polynom.

För att finna en bas så ser vi att om $p \in V$ så kan p skrivas på formen

$$p(x) = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4.$$

Nu gäller att

$$0 = p(0) = A,$$

och

$$0 = \int_0^1 p(x)\, dx = B + C + D + E,$$

så $E = -(B + C + D)$. Härav följer att

$$p(x) = B(2x - 5x^4) + C(3x^2 - 5x^4) + D(4x^3 - 5x^4).$$

Så om vi låter $e_1(x) = 2x - 5x^4$, $e_2(x) = 3x^2 - 5x^4$ och $e_3(x) = 4x^3 - 5x^4$ så spänner e_1, e_2, e_3 rummet V. De är oxå linjärt oberoende ty om

$$\alpha(2x - 5x^4) + \beta(3x^2 - 5x^4) + \gamma(4x^3 - 5x^4) \equiv 0,$$

fås genom succesiva derivationer och evalueringar i $x = 0$, att $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Detta visar att e_1, e_2, e_3 är en bas för V och dimensionen av V är alltså 3.