Fundamentalsatsen i Linjär Algebra*

Ett alternativt argument

96-09-04

Sats 1 (Dimensionsatsen) *Låt A vara en $m \times n$ matris vars nollrum har dimension d.*

Då har kolonnrummet dimension $n - d$.

Bevis: Låt $e_1, e_2, ..., e_d$ vara en bas i nollrummet och utvidga den till en bas $e_1, e_2, ..., e_d, e_{d+1}, ..., e_n$ i $\mathbf{R}^n$.

För $x \in \mathbf{R}^n$ gäller då $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ och $Ax = \sum_{k=d+1}^n x_k A e_k$, eftersom de första d vektorerna i basen ligger i nollrummet.

Vi skall visa att $\{Ae_k\}_{k=d+1}^n$ är en bas för kolonnrummet, vars dimension då är $n - d$. Detta fullbordar beviset.

Kolonnrummet spänns uppenbarligen av $\{Ae_k\}_{k=1}^n$, d.v.s. av $\{Ae_k\}_{k=d+1}^n$, eftersom de d första alla är 0.

Anta att $\{Ae_k\}_{k=d+1}^n$ är linjärt beroende. Då finns tal λ_k, $k = d+1, ..., n$, inte alla 0, så att

$$A \sum_{k=d+1}^n \lambda_k e_k = \sum_{k=d+1}^n \lambda_k A e_k = 0$$

Detta innebär då att dimensionen av nollrummet är strikt större än d, vilket utgör en motsägelse. Därmed har vi funnit att $\{Ae_k\}_{k=d+1}^n$ är linjärt oberoende.

□

* För EMW av J Bergh.