Matematiska Institutionen
CTH & GU

Vilhelm Adolfsson, 772 53 07, vilhelm@math.chalmers.se

Kompletterande övningar i Linjär algebra för Matematiska Metoder E2, lp I, 1999

Svar kommer på måndag!!!

A1 Låt $V = C(\mathbf{R})$ och $M = \{f \in V : f(-x) = f(x)\}$. Är M ett underrum i V?

A2 Låt $V = C[0,1]$ och $M = \{f \in V : f(0) = 1\}$. Är M ett underrum i V?

A3 Låt $\mathcal{P}_n$ vara mängden av alla reella polynom av grad högst n. Ange en bas för $\mathcal{P}_n$ och dimensionen.

A4 Beteckna med V mängden av alla reella polynom $p(x)$ av grad ≤ 4 sådana att $p(0) = 0$ och

$$\int_0^1 p(x)\,dx = 0.$$

Visa att V är ett linjärt rum och ange en bas och dimensionen av V.

A5 Visa att mängden av alla funktioner f av formen

$$f(x) = A + B\cos x + C\cos 2x, \qquad A, B, C \in \mathbf{R},$$

är ett linjärt rum. Finn en bas för rummet och ange dimensionen. Visa att funktionen $g(x) = \cos^2 x$ tillhör rummet, ange komponenterna för g med avseende på basen och den kolonnvektor som representerar g.

A6 Kan vektorn $(1, 2, 0, -1)$ i $\mathbf{R}^4$ skrivas som en linjärkombination av $u = (1, 1, -2, 1)$ och $v = (2, 1, 4, 5)$?

A7 Visa att vektorerna $(1, 0, 1, 4)$, $(2, 2, 0, 0)$, $(3, 1, 0, 2)$ och $(4, 1, 1, 6)$ är linjärt beroende. Skriv $(3, 1, 0, 2)$ som en linjärkombination av de övriga. Kan $(2, 2, 0, 0)$ skrivas som en linjärkombination av de övriga?

A8 Är $\{(1, 2, -1, -2, 4),\ (6, 1, 5, 3, 2),\ (4, -3, 7, 7, -6)\}$ linjärt beroende i $\mathbf{R}^5$?

A9 Visa att vektorerna $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 2, 3)$, $(0, 0, 1, 2)$, $(0, 0, 0, 1)\}$ bildar en bas i $\mathbf{R}^4$. Bestäm koordinaterna för $(1, 1, 1, 1)$ i denna bas.

A10 Vektorena $v_1, v_2, \dots v_k$ i $\mathbf{R}^n$ är linjärt oberoende. Vad är dimensionen av det underrum som genereras av $v_1 - v_2, v_2 - v_3, \dots, v_{k-1} - v_k, v_k - v_1$?

A11 Vad är dimensionen av det linjära rummet av alla $n \times n$-matriser?

A12 Vad är dimensionen av det linjära underrummet av symmetriska matriser i rummet av alla $n \times n$-matriser?

A13 Bestäm dimensionen av det underrum i $\mathbf{R}^4$ som genereras av vektorerna $(1, 2, 4, 3)$, $(2, 1, 5, 0)$, $(1, 1, 3, 1)$, $(4, 2, 10, 0)$.

A14 Visa att vektorerna $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$ och $(0, 1, 1, 1, 1, -1)$ genererar samma underrum i $\mathbf{R}^6$ som vektorerna $(4, -5, -1, -5, -1, 5)$ och $(-3, 2, -1, 2, -1, -2)$.

A15 Låt U_1 och U_2 vara underrum i det linjära rummet V. Visa att $U_1 \cap U_2$ och $U_1 + U_2 = \{u + v : u \in U_1, v \in U_2\}$ är underrum i V.

A16 Bestäm dimensionen av $U_1 \cap U_2$ och $U_1 + U_2$ för de underrum U_1 och U_2 som ges av

$$U_1 : \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 + x_4 &= 0, \end{cases} \quad U_2 : \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

A17 Bestäm talen a, b och c så att matrisen $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & b \\ 3 & 2 & c \\ 6 & a & 2 \end{pmatrix}$ blir ortogonal.

A18 Sätt $F(u) = \frac{d^2u}{dt^2} - 2t\frac{du}{dt}$. Visa att F är en linjär avbilning på polynomen $\mathcal{P}_n$ av grad högst n. Bestäm matrisen för F på $\mathcal{P}_3$ i basen $1, t, t^2, t^3$.

A19 F är en linjär avbildning på $\mathbf{R}^2$ sådan att $F(1,1) = (-1,1)$ och $F(1,2) = (1,1)$. Bestäm matrisen för F i standardbasen.

A20 Låt e_1, e_2, e_3 vara en bas i $\mathbf{R}^3$ och F en linjär avbildning med matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ i denna bas. Finn matrisen för F i den bas e' som ges av $e_1' = e_2 - e_3$, $e_2' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_3' = -e_1 + e_2$.

A21 Betrakta den linjära avbildning i $\mathbf{R}^3$ som i standardbasen ges av matrisen $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Denna avbildning beskriver en rotation i $\mathbf{R}^3$. Finn rotationsaxeln.

A22 Ange samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A23 Avgör om matrisen $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 8 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar och bestäm i så fall en matris T sådan att $T^{-1}AT$ är en diagonalmatris och ange denna diagonalmatris.

A24 Bestäm en ortogonalmatris Q sådan att Q^TAQ är en diagonalmatris och ange denna diagonalmatris, då $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 7 \\ -2 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

A25 Talen a_k och b_k definieras för heltal $k \geq 0$ av $\left\{ \begin{array}{rcll} a_{k+1} & = & a_k + 2b_k, & a_0 = 3 \\ b_{k+1} & = & 2a_k + b_k, & b_0 = 1 \end{array} \right)$. Beräkna a_{10} och b_{10}.

A26 Vad är det största och minsta värde som den kvadratiska formen $q(x) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ antar då $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.