Matematiska Institutionen
CTH & GU

Vilhelm Adolfsson, 772 53 07, vilhelm@math.chalmers.se

Kompletterande övningar i Linjär algebra för Matematiska Metoder E2, lp I, 1999

A1 Låt $V = C(\mathbf{R})$ och $M = \{f \in V : f(-x) = f(x)\}$. Är M ett underrum i V?

Lösning: Vi ser att M är slutet under addition ty om $f, g \in M$ så gäller $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$, dvs $f + g \in M$. På liknande sätt ser vi att M slutet under skalärmultiplikation, så M är ett underrum.

A2 Låt $V = C[0,1]$ och $M = \{f \in V : f(0) = 1\}$. Är M ett underrum i V?

Lösning: Då funktionen f som är identiskt noll på $[0,1]$, dvs nollelementet i det linjära rummet V, ej uppfyller $f(0) = 1$ så är f ej element i M så M är ej ett underrum.

A3 Låt $\mathcal{P}_n$ vara mängden av alla reella polynom av grad högst n. Ange en bas för $\mathcal{P}_n$ och dimensionen.

Lösning: Vi har att $V = \{p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0 : \ t, a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}\}$. Det är då klart att varje $p \in V$ går att skriva som en linjärkombination av $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n$, så dessa spänner V. De är oxå linjärt oberoende i rummet av alla reella polynom ty om för $\forall t \in \mathbf{R}$ gäller att

$$0 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{n-1}t^{n-1} + a_n t^n,$$

så ger valet $t = 0$ att $a_0 = 0$, dvs. att

$$0 = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{n-1}t^{n-1} + a_n t^n.$$

Derivation av denna identitet och evaluering i $t = 0$ ger $a_1 = 0$. På samma sätt erhålls att $a_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Dvs. $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n$ är linjärt oberoende.

Följdaktligen gäller att $\mathrm{Dim}(V) = n + 1$.

A4 Beteckna med V mängden av alla reella polynom $p(x)$ av grad ≤ 4 sådana att $p(0) = 0$ och

$$\int_0^1 p(x)\,dx = 0.$$

Visa att V är ett linjärt rum och ange en bas och dimensionen av V.

Lösning: Vi har

$$V = \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 : \ t, a_0, \ldots, a_4 \in \mathbf{R}, p(0) = 0, \int_0^1 p(x)\,dx = 0\}.$$

Vi behöver visa att om $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ och $p, q \in V$ så gäller att $w = \alpha p + \beta q \in V$. Det är klart att w är ett polynom av grad högst 4. Vidare gäller att

$$w(0) = \alpha p(0) + \beta q(0) = 0,$$

och

$$\int_0^1 w(x)\,dx = \alpha \int_0^1 p(x)\,dx + \beta \int_0^1 q(x)\,dx = 0.$$

Det följer att V är ett linjärt rum; ett underrum till rummet av alla reella polynom.

För att finna en bas så ser vi att om $p \in V$ så kan p skrivas på formen

$$p(x) = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4.$$

Nu gäller att

$$0 = p(0) = A,$$

och

$$0 = \int_0^1 p(x)\,dx = B + C + D + E,$$

så $E = -(B + C + D)$. Härav följer att

$$p(x) = B(2x - 5x^4) + C(3x^2 - 5x^4) + D(4x^3 - 5x^4).$$

Så om vi låter $e_1(x) = 2x - 5x^4$, $e_2(x) = 3x^2 - 5x^4$ och $e_3(x) = 4x^3 - 5x^4$ så spänner e_1, e_2, e_3 rummet V. De är oxå linjärt oberoende ty om

$$\alpha(2x - 5x^4) + \beta(3x^2 - 5x^4) + \gamma(4x^3 - 5x^4) \equiv 0,$$

fås genom succesiva derivationer och evalueringar i $x = 0$, att $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Detta visar att e_1, e_2, e_3 är en bas för V och dimensionen av V är alltså 3.

A5 Visa att mängden av alla funktioner f av formen

$$f(x) = A + B\cos x + C\cos 2x, \qquad A, B, C \in \mathbf{R},$$

är ett linjärt rum. Finn en bas för rummet och ange dimensionen. Visa att funktionen $g(x) = \cos^2 x$ tillhör rummet, ange komponenterna för g med avseende på basen och den kolonnvektor som representerar g.

Lösning: Det är klart att mängden är ett linjärt rum ty det är ett underrum till rummet av funktioner på $\mathbf{R}$ då ju summan av två funktioner i mängden återigen är en funktion av samma typ, dvs tillhör mängden. Pss för skalärmultiplikation. Uppsättningen $\{1, \cos x, \cos 2x\}$ spänner helt klart rummet och det är inte svårt att se att dessa funktioner är linjärt oberoende. Alltså är de en bas för rummet. Från trigonometriska formler har vi att $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$ så g representeras av $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ i basen ovan.

A6 Kan vektorn $(1, 2, 0, -1)$ i $\mathbf{R}^4$ skrivas som en linjärkombination av $u = (1, 1, -2, 1)$ och $v = (2, 1, 4, 5)$?

Lösning: Låt $a = (1, 2, 0, -1)$. Om a kan skrivas som en linjärkombination av u och v så finns reella tal α och β s.a. $a = \alpha u + \beta v$. Dvs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Dvs vi vill veta huruvida ekvationssystemet $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{array}\right)$ är lösbart. Det är inte lösbart så a kan ej skrivas som en linjärkombination av u och v.

A7 Visa att vektorerna $(1, 0, 1, 4)$, $(2, 2, 0, 0)$, $(3, 1, 0, 2)$ och $(4, 1, 1, 6)$ är linjärt beroende. Skriv $(3, 1, 0, 2)$ som en linjärkombination av de övriga. Kan $(2, 2, 0, 0)$ skrivas som en linjärkombination av de övriga?

Lösning: Låt vektorerna betecknas v_1, v_2, v_3 resp. v_4. Vi vill visa att ekvationen $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_2 v_2 + \alpha_4 v_4 = 0$ har icke-trivial lösning $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Ekvationen går att skriva som en matrisekvation $A\alpha = 0$ där kolonnerna i A är $v_1, \ldots, v_4$ och α skrivs som kolonnvektor. Vi får alltså att lösa ekvationssystemet $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ som har lösningar $\alpha = t(1, 0, 1, -1)$ där

$t \in \mathbf{R}$. Väljer vi $t = -1$ så får vi att $-v_1 - v_3 + v_4 = 0$, dvs. $(3, 1, 0, 2) = (4, 1, 1, 6) - (1, 0, 1, 4)$. Vi ser oxå att då α_2 är 0 så kan ej $v_2 = (2, 2, 0, 0)$ uttryckas som en linjärkombination av de övriga. Alternativt kan vi söka lösningar till ekvationen $\alpha v_1 + \beta v_3 + \gamma v_4 = v_2$, dvs lösningar till ekvationssystemet $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right)$, som inte har några lösningar. Alltså kan ej $v_2 = (2, 2, 0, 0)$ skrivas som en linjärkombination av de övriga.

A8 Är $\{(1, 2, -1, -2, 4),\ (6, 1, 5, 3, 2),\ (4, -3, 7, 7, -6)\}$ linjärt beroende i $\mathbf{R}^5$?

Lösning: En linjärkombination av vektorerna som blir nollvektorn går att pss som i föregående uppgifter skriva som en matrisekvation $Ax = 0$ där kolonnerna är de givna vektorerna. Frågan blir alltså om ekvationssystemet $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 5 & 7 \\ -2 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ har icke-trivial lösning. Matrisen är radekvivalent med $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ som har lösningar $x = t(2, -1, 1)$ för $t \in \mathbf{R}$ så vektorerna är linjärt beroende.

A9 Visa att vektorerna $(1, 2, 3, 4),\ (0, 1, 2, 3),\ (0, 0, 1, 2),\ (0, 0, 0, 1)\}$ bildar en bas i $\mathbf{R}^4$. Bestäm koordinaterna för $(1, 1, 1, 1)$ i denna bas.

Lösning: Vi vet att om 4 vektorer i det 4-dimensionella linjära rummet $\mathbf{R}^4$ är linjärt oberoende så är de också en bas. De givna vektorerna är linjärt oberoende ty en linjärkombination av dem som blir 0 kan formuleras som matrisekvationen $Ax = 0$ där kolonnerna i A är de givna vektorerna och denna matrisekvation har endast den triviala lösningen. Detta inses antingen genom att se att determinanten av A är skild från 0 eller genom att se att matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ är radekvivalent med identitetsmatrisen. För att finna koordinaterna $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ för $(1, 1, 1, 1)$ i denna bas löser vi ekvationen $Ax = (1, 1, 1, 1)^T$ som har lösning $x = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gauss-Jordan ger att $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ så $x = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

A10 Vektorena $v_1, v_2, \ldots v_k$ i $\mathbf{R}^n$ är linjärt oberoende. Vad är dimensionen av det underrum som genereras av $v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{k-1} - v_k, v_k - v_1$?

Lösning: Då vektorerna är linjärt oberoende så är $k \leq n$. Låt $u_i = v_i - v_{i+1}$ för $i = 1, \ldots, k-1$ och $u_k = v_k - v_1$ samt U =span$(u_1, \ldots, u_k)$. Koordinaterna för u_i, $i = 1, \ldots, k-1$, i basen $v_1, \ldots, v_k$ är $(0, \ldots, 0, 1, -1, 0, \ldots, 0)$ där 1 står på plats i, (och -1 på plats $i + 1$), och koordinaterna för u_k är $(-1, 0 \ldots, 0, 1)$. Då motsvaras U av värderummet $V(A)$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ som är radekvivalent med } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

där pivotelementen finns i första till näst sista kolonnen. Alltså är u_i, $i = 1, \dots, k-1$ en bas för U så dim$U = k - 1$.

A11 Vad är dimensionen av det linjära rummet av alla $n \times n$-matriser?

Lösning: I fallet 2×2-matriser ser vi att $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ så matriserna med en etta på en plats och nollor för övrigt spänner rummet av 2×2-matriser. Vidare är det klart att de även är linjärt oberoende. Alltså är de en bas för rummet av 2×2-matriser. Rummet av $n \times n$-matriser har som bas pss de matriser som har en etta på ett ställe och nollor för övrigt. Alltså är dimensionen av rummet av $n \times n$-matriser lika med n^2.

A12 Vad är dimensionen av det linjära underrummet av symmetriska matriser i rummet av alla $n \times n$-matriser?

Lösning: Jämför med föregående övning. Vi ser då i fallet 2×2-matriser att $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ så endast de element med en etta på diagonalen och nollor för övrigt eller de med en etta ovanför diagonalen (och etta på motsvarande symmetriska plats nedanför diagonalen) kan ge baselement. Det är klart att sådan vektorer är linjärt oberoende. Alltså finns baselement för alla platser på diagonalen och även för varje plats ovanför diagonalen. Antalet platser på diagonalen är n. Antalet platser ovanför diagonalen är i första raden $n-1$, andra raden $n-2$ osv till $(n-1)$a raden som har ett element och $n$te raden 0. Alltså, totalt ovanför diagonalen har vi $(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = (n-1)n/2$ element. Så totalt får vi $n + ((n-1)n/2) = n(n+1)/2$ baselement. Dvs den sökta dimensionen är $n(n+1)/2$.

A13 Bestäm dimensionen av det underrum i $\mathbf{R}^4$ som genereras av vektorerna $(1, 2, 4, 3)$, $(2, 1, 5, 0)$, $(1, 1, 3, 1)$, $(4, 2, 10, 0)$.

Lösning: Det sökta underrummet är värderummet $V(A)$ till matrisen A som har som kolonner de givna vektorerna, dvs $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 10 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Denna matris är radekvivalent med $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ som har pivotelementen i kolonn 1 och 2. Alltså är kolonn 1 och 2 i A en bas för $V(A)$ och den sökta dimensionen är alltså 2.

A14 Visa att vektorerna $(1, 0, 1, 0, 1, 0)$ och $(0, 1, 1, 1, 1, -1)$ genererar samma underrum i $\mathbf{R}^6$ som vektorerna $(4, -5, -1, -5, -1, 5)$ och $(-3, 2, -1, 2, -1, -2)$.

Lösning: Låt $u_1 = (1, 0, 1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 1, 1, 1, -1)$, $v_1 = (4, -5, -1, -5, -1, 5)$ och $v_2 = (-3, 2, -1, 2, -1, -2)$. Låt vidare U =span(u_1, u_2), V =span(v_1, v_2). Vi vill visa $U = V$. Vi söker α, β sådana att $v_1 = \alpha u_1 + \beta u_2$ och γ, δ sådana att $v_2 = \gamma u_1 + \delta u_2$ som har lösningar $\alpha = 4, \beta = -5$ och $\gamma = -3, \delta = 2$. Alltså gäller $V \subset U$. Från $v_1 = 4u_1 - 5u_2$, $v_2 =$

$-3u_1 + 2u_2$ får vi att $u_1 = -(2/7)v_1 - (5/7)v_2$ och $u_2 = -(3/7)v_1 - (4/7)v_2$. Därför fås $U = \text{span}(u_1, u_2) \subset \text{span}(v_1, v_2) = V$, vilket ger att $U = V$.

A15 Låt U_1 och U_2 vara underrum i det linjära rummet V. Visa att $U_1 \cap U_2$ och $U_1 + U_2 = \{u + v : u \in U_1, v \in U_2\}$ är underrum i V.

Lösning: Antag att $u, v \in U_1 \cap U_2$. Dågäller att för α, β skalärer så $\alpha u + \beta v \in U_1$ och $\alpha u + \beta v \in U_2$ då ju U_1 och U_2 är (under)rum. Alltså är $\alpha u + \beta v$ element i både U_1 och U_2. Dvs $\alpha u + \beta v \in U_1 \cap U_2$ så $U_1 \cap U_2$ är ett underrum.

För att se att $U_1 + U_2$ är ett underrum, låt $u_1, v_1 \in U_1$ och $u_2, v_2 \in U_2$. Då är $u_1 + u_2 \in U_1 + U_2$ och $v_1 + v_2 \in U_1 + U_2$. Det gäller nu att för skalärer α, β har vi $\alpha(u_1 + u_2) + \beta(v_1 + v_2) = w_1 + w_2$ där $w_i = \alpha u_i + \beta v_i \in U_i$, $i = 1, 2$. Alltså har vi att $\alpha(u_1 + u_2) + \beta(v_1 + v_2) \in U_1 + U_2$, så $U_1 + U_2$ är ett underrum.

A16 Bestäm dimensionen av $U_1 \cap U_2$ och $U_1 + U_2$ för de underrum U_1 och U_2 som ges av

$$U_1 : \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 + x_4 &= 0, \end{cases} \quad U_2 : \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

Lösning: Vi ser att $U_1 \cap U_2 = N(A)$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. (Observera att här är koefficienterna i ekvationerna för U_1, U_2 rader i A.) Vidare är A radekvivalent med $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vi kan nu ta fram lösningarna och se dimensionen därifrån eller, ngt enklare, konstatera att pivotelementen är 3 så $\dim V(A) = 3$ och därmed är enligt dimensionsatsen $\dim N(A) = 4 - \dim V(A) = 4 - 3 = 1$.

För att bestämma dimensionen av $U_1 + U_2$ så ser vi att $U_1 = N(A)$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ och $U_2 = N(B)$ där $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Vi löser dessa ekvationssystem och ser att lösningarna till $Ax = 0$ ges av $x = su_1 + tu_2$, $s, t \in \mathbf{R}$, där $u_1 = \begin{pmatrix} -11 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. På liknande sätt ses att lösningarna till $Bx = 0$ ges av $x = su_3 + tu_4$, $s, t \in \mathbf{R}$, där $u_3 = \begin{pmatrix} -13 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_4 = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vi har alltså nu att $N(A) = \text{span}(u_1, u_2)$ och $N(B) = \text{span}(u_3, u_4)$ och får då att $U_1 + U_2 = \text{span}(u_1, u_2, u_3, u_4) = V(C)$ där $C = \begin{pmatrix} -11 & -3 & -13 & -6 \\ -3 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ som genom att byta raderna, är radekvivalent med $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & -1 \\ -11 & -3 & -13 & -6 \end{pmatrix}$ som i sin tur är radekvivalent med $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vi ser nu att $\dim U_1 + U_2 = \dim V(C) = 3$.

A17 Bestäm talen a, b och c så att matrisen $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 6 & b \\ 3 & 2 & c \\ 6 & a & 2 \end{pmatrix}$ blir ortogonal.

Lösning: I en ortogonalmatris så har kolonnerna längd 1, som ger $40 + a^2 = 49$ och $b^2 + c^2 + 4 = 49$, och kolonnerna är parvis ortogonala som ger $2b + 3c + 12 = 0$, $6b + 2c + 2a = 0$ och $12 + 6 + 6a = 0$. Vi finner lösningen $a = -3, b = 3, c = -6$.

A18 Sätt $F(u) = \frac{d^2u}{dt^2} - 2t\frac{du}{dt}$. Visa att F är en linjär avbilning på polynomen $\mathcal{P}_n$ av grad högst n. Bestäm matrisen för F på $\mathcal{P}_3$ i basen $1, t, t^2, t^3$.

Lösning: a) Då vi har för funktioner f, g definierade på $\mathbf{R}$ och skalärer α, β, att $F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$ så är F en linjär avbildning på rum som omfattar $\mathcal{P}_n$. Det enda som inte är omdelbart är huruvida $F(u) \in \mathcal{P}_n$ om $u \in \mathcal{P}_n$. Då för $u \in \mathcal{P}_n$, $d^2udt^2 \in \mathcal{P}_{n-2}$, $\frac{du}{dt} \in \mathcal{P}_{n-1}$ och $t\frac{du}{dt} \in \mathcal{P}_{n-1}$, så har vi att $F(u) \in \mathcal{P}_n$.

b) Matrisen A för avbildningen i en given bas har som kolonner koordinaterna i den givna basen, för bilden av baselementen: $A = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ F(1) & F(t) & F(t^2) & F(t^3) \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$. Nu är $F(1) = 0$, $F(t) = -2t$, $F(t^2) = 2 - 2t(2t) = 2 - 4t^2$, $F(t^3) = 6t - 2t(3t^2) = 6t - 6t^3$, så $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$.

A19 F är en linjär avbildning på $\mathbf{R}^2$ sådan att $F(1,1) = (-1,1)$ och $F(1,2) = (1,1)$. Bestäm matrisen för F i standardbasen.

Lösning: Vi ser att då F är linjär så är $F(0,1) = F((1,2) - (1,1)) = F(1,2) - F(1,1) = (1,1) - (-1,1) = (2,0)$ och $F(1,0) = F((1,1) - (0,1)) = F(1,1) - F(0,1) = (-1,1) - (2,0) = (-3,1)$. Alltså är matrisen A för avbildningen F i standardbasen $A = \begin{pmatrix} | & | \\ F(1,0) & F(0,1) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

A20 Låt e_1, e_2, e_3 vara en bas i $\mathbf{R}^3$ och F en linjär avbildning med matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ i denna bas. Finn matrisen för F i den bas e' som ges av $e'_1 = e_2 - e_3$, $e'_2 = e_1 - e_2 + e_3$, $e'_3 = -e_1 + e_2$.

Lösning: Transformationsmatrisen för basbytet från basen e_1, e_2, e_3 till nya basen e'_1, e'_2, e'_3 är $T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ e'_1 & e'_2 & e'_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}_{(e_1,e_2,e_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Matrisen A ges i den nya basen av $A' = T^{-1}AT$. Genom Gauss-Jordan elimination finner vi att $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ så $A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

A21 Betrakta den linjära avbildning i $\mathbf{R}^3$ som i standardbasen ges av matrisen $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Denna avbildning beskriver en rotation i $\mathbf{R}^3$. Finn rotationsaxeln.

Lösning: Rotationsaxeln är invariant under avbildningen, dvs för punkter x på axeln har vi $Ax = x$, dvs x är en egenvektor för egenvärdet 1. Vi finner egenvektorerna för egenvärdet 1 genom att lösa ekvationssystemet $(A-I)x = 0$. Nu är $(A-I) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6-7 & 2 & 3 \\ 2 & -3-7 & 6 \\ 3 & 6 & 2-7 \end{pmatrix}$.

Lös alltså $\begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 2 & -10 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$. Vi byter första och andra raden och får $\begin{pmatrix} 2 & -10 & 6 \\ -13 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ som är radekvivalent med $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vars lösningar är $x = s(1,2,3)$. Alltså är rotationsaxeln linjen genom origo med riktningsvektor $(1,2,3)$.

A22 Ange samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösning: Vi löser karakteristiska ekvationen $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$ $(2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + (-1)(-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2-\lambda \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1)$. Så egenvärdena är $\lambda_{1,2,3} = 1, 2, 3$. För $\lambda_1 = 1$ fås att lösa: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ som är radekvivalent med $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ med lösningar $x = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, som är egenvektorerna för $t \neq 0$. Övriga egenvektorer, för de andra egenvärdena, fås på analogt sätt.

A23 Avgör om matrisen $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 8 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ är diagonaliserbar och bestäm i så fall en matris T sådan att $T^{-1}AT$ är en diagonalmatris och ange denna diagonalmatris.

Lösning: Vi löser karakteristiska ekvationen $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 & -1 \\ 8 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$ $\lambda(1+\lambda)(1-\lambda)$. Då alla egenvärdena $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$ är olika så är A diagonaliserbar. Pss i föregående uppgift finner vi att egenvektorerna för $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ är $t(1,-3,1)$, $t(1,-5,2)$, respektive $t(0,-1,1)$, $t \neq 0$. En matris T som diagonaliserar A är då matrisen som har som kolonner de funna egenvektorerna, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ och $T^{-1}AT = D \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, där D alltså är en diagonalmatris med diagonalelement egenvärdena, (i samma ordning som egenvektorerna i T).

A24 Bestäm en ortogonalmatris Q sådan att Q^TAQ är en diagonalmatris och ange denna diagonalmatris, då $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 7 \\ -2 & 7 & -5 \end{pmatrix}$.

Lösning: Genom att lösa karakteristiska ekvationen finner vi att egenvärdena är $6, 0, -12$. Motsvarande egenvektorer är t.ex. $(-2, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ och $(0, -1, 1)$ som efter normering sätts som kolonner i en matris som vi kan ta som vårt Q; så $Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} =$ $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ och $Q^T AQ = D \equiv \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$.

A25 Talen a_k och b_k definieras för heltal $k \geq 0$ av $\left\{ \begin{array}{lcll} a_{k+1} & = & a_k + 2b_k, & a_0 = 3 \\ b_{k+1} & = & 2a_k + b_k, & b_0 = 1 \end{array} \right)$. Beräkna a_{10} och b_{10}.

Lösning: Låt $u_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Då gäller $u_{n+1} = Au_n$, $u_0 = (3, 1)^T$ och $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Vi kan diagonalisera A ty matrisen är reell och symmetrisk. Egenvärdena är $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ med motsvarande egenvektorer $(-1, 1)$ och $(1, 1)$. En ortogonalmatris Q som diagonaliserar A är därför $Q = (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Vi får $A = QDQ^T$ där $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Vi får nu att $u_{10} = A^{10} u_0 = QD^{10} Q^T u_0 = Q \begin{pmatrix} (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{pmatrix} Q^T u_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^{10} + 1 & 3^{10} - 1 \\ 3^{10} - 1 & 3^{10} + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} =$ $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (3^{10} + 1)3 + 3^{10} - 1 \\ (3^{10} - 1)3 + 3^{10} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^{10} + 1 \\ 2 \cdot 3^{10} - 1 \end{pmatrix}$.

A26 Vad är det största och minsta värde som den kvadratiska formen $q(x) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ antar då $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Lösning: Vi ser att $q(x) = x^T Ax$ där $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ som har dubbelt egenvärde 6 och enkelt egenvärde 9. Vi vet att $\lambda_{\min} \|x\|^2 \leq q(x) = x^T Ax \leq \lambda_{\max} \|x\|^2$ med likhet för motsvarande egenvektorer. Alltß får vi att $\min_{\|x\|=1} q(x) = 6$, $\max_{\|x\|=1} q(x) = 9$.