Spektralsatsen *

98-09-25

Detta ger ett alternativ till kursbokens framställning av spektralsatsen för Hermiteska (speciellt reella symmetriska) matriser.

Spektralsatsen Låt A vara en Hermitesk matris av typ $n \times n$. Då finns en unitär matris U och en reell diagonalmatris Λ så att

$$U^{-1}AU = \Lambda.$$

Då A är reell symmetrisk kan den unitära matrisen U väljas reell och är då ortogonal. Notera att egenvektorerna till A är kolonnerna i U, vilka alltså utgör en ortonormerad bas.

Vi skall argumentera med hjälp av Algebrans Fundamentalsats samt induktion: reducera $n \times n$ problemet till motsvarande $(n-1) \times (n-1)$ problem. En nyckelobservation är följande lemma.

Lemma Anta att A är Hermitesk och att $u(\neq 0)$ är en egenvektor till A : $Au = \lambda u$ för något tal λ. Om vektorn v är ortogonal mot u så är också Av ortogonal mot u.

Bevis av lemmat $(Av)^H u = v^H A^H u = v^H Au = \lambda v^H u = 0.$

Bevis av Spektralsatsen En $n \times n$ matris A har alltid minst en egenvektor $u(\neq 0) : Au = \lambda_1 u$ för något λ_1. Detta följer av Algebrans Fundamentalsats använd på ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$.

Bilda den unitära matrisen U_1 genom att låta den normerade egenvektorn utgöra första kolonnen medan övriga kolonner konstrueras t.ex. med Gram-Schmidt algoritmen. Då får vi enligt lemmat att

$$U_1^{-1}AU_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{A_2} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

*För E2, CTH, av J. Bergh

där $(n-1)\times(n-1)$ matrisen A_2 är Hermitesk (eftersom U_1 är unitär får vi också 0 i första raden utanför λ_1; A_2 är Hermitesk eftersom $U_1^{-1}AU_1$ är det och λ_1 är reellt av samma skäl). I nästa steg får vi med motsvarande beteckningar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{U_2^{-1}} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} U_1^{-1}AU_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{U_2} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & & & \boxed{A_3} & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

där λ_2 är reell, A_3 är Hermitesk och både U_2 och sista faktorn i högerledet är unitära. Upprepning ger oss slutligen efter n steg det önskade resultatet

$$U^{-1}AU = \Lambda$$

där U är unitär (en produkt av unitära matriser), vars kolonner (U:s) är en ortonormerad bas av egenvektorer till A.

Skulle A vara reell och symmetrisk kan också den unitära matrisen U väljas reell och blir då ortogonal. (Egenvektorerna u_k i ekvationerna $Au_k = \lambda_k u_k$ kan väljas reella eftersom då både A och λ_k är reellvärda.)