

MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

Tentamen

2011-08-22, kl. 14.00 - 18.00

TMV036/TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B

Telefonvakt: Aron Lagerberg, telefon: 0703-088304

Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgifterna 1–4 (totalt 19 poäng) är korta frågor på det grundläggande materialet och du behöver endast ge kortfattade lösningar och svar.

På uppgifterna 5–9 (totalt 31 poäng) skall du ge fullständiga lösningar. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 20 - 29 p. ger betyget 3, 30 - 39 p. ger betyget 4 och 40 eller mer betyget 5.

Lösningar kommer att läggas ut på kurskanslensida första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(a) Beräkna $\det A$ (3p)

(b) Antag att B är en matris som är radekvivalent med A .
Vad kan vi då säga om värdet på $\det B$? (2p)

2. Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases} \quad (4p)$$

3. Beräkna $\int_3^\infty \frac{x-2}{x^3-4x} dx$ (5p)

4. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} \sqrt{x} y' - y^2 = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ (5p)

Till uppgifterna 5–9 skall du lämna in fullständiga lösningar.

5. Beräkna arean av det begränsade område i xy -planet som begränsas av kurvorna $y = e^x$ och $y = e^{\sqrt{x}}$ (6p)

6. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y'' - 4y' + 13y = e^{2t} \cos 3t \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$ (6p)

Vänd!

7. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (som vanligt) beteckna standardbasen i $\mathbb{R}^3$ och låt

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Låt vidare A vara standardmatrisen för den linjära avbildning T från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ som avbildar $\mathbf{v}_1$ på $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{v}_2$ på $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{v}_3$ på $\mathbf{e}_2$,
dvs. $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{e}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{e}_2$ och $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{e}_2$.

(a) Visa att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ bildar en bas för $\mathbb{R}^3$ (3p)

(b) Bestäm en bas för kolonnrummet $Col A$ (2p)

(c) Bestäm en bas för nollrummet $Nul A$ (2p)

8. Antag att A och B är kvadratiska matriser sådana att AB är inverterbar.

(a) Visa då att även A och B är inverterbara. (3p)

(b) Visa att $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (3p)

9. (a) Antag att f är en kontinuerlig funktion på ett intervall $I = [a, b]$.

Visa då att $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$, för alla $x \in I$. (4p)

(b) Beräkna $F'(1)$ då $F(x) = x \int_x^1 \cos(\pi t^2) dt$ (2p)

Lycka till !
Thomas W

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan \frac{x}{a}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln |x+a|.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right|, \quad a \neq 0.$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| \right)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|$$

Uttryck i integranden

$$\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\sqrt{a^2 + x^2}, \quad \frac{1}{a^2 + x^2}$$

Substituera

$$x = a \cdot \sin(\theta), \quad x = a \cdot \cos(\theta)$$

$$x = a \cdot \tan(\theta)$$

Förskjutningsregeln

Om¹

$$P(D)y = y'' + ay' + by, \text{ dvs } P(D) = D^2 + aD + b$$

så är

$$P(D)z(x)e^{\alpha x} = e^{\alpha x} P(D + \alpha)z(x)$$

¹Det räcker att $P(D)$ är en linjär differentialoperator med konstanta koefficienter