Matematik
Chalmers tekniska högskola 2013-12-19

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Jacob Leander, telefon 0703-088304 Plats och tid: V, e.m.
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.
Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.
Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamenstillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

---

1 Låt

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm alla lösningar till $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ (5p)

(b) Vilken rang har $\boldsymbol{A}$ och vilken dimension har nollrummet $\operatorname{Nul}\boldsymbol{A}$ till matrisen (motivera ditt svar)? (2p)

(c) Ange en vektor i $\mathbb{R}^3$ som *inte* tillhör kolonnrummet $\operatorname{Col}\boldsymbol{A}$ (motivera ditt svar). (3p)

2 (a) Bestäm B så att $B^2 \int_0^2 \cos^2(\frac{\pi}{2}x)dx = 1$ (3p)

(b) Beräkna $\int \sin(\sqrt{x})dx$. (Använd variabelsubstitutionen $t = \sqrt{x}$) (4p)

(c) Visa att (4p)

$$\int_0^1 \tan(\sqrt{x})dx \le \frac{\tan(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \tan(1)}{2}$$

(Använd lämplig rektangelregel).

3 (a) Lös begynnelsevärdesproblemet (5p)

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{x}y = 5 \ , \ 1 \le x \le 3 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(b) Använd Euler's (framåt) metod och beräkna en approximation till begynnelsevärdesproblemet i (a)-uppgiften. Tag steglängden $h = 1$. (3p)

4 (a) Låt (4p)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\mu} & e^{-\mu} \end{bmatrix}$$

där $\mu \in \mathbb{R}$. För vilka värden på μ är $\mathbf{A}$ inverterbar?

(b) Låt $\mu \in \mathbb{R}$. Betrakta (5p)

$$\begin{cases} y''(x) - \mu^2 y(x) = 0, \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases}$$

Visa att, om $\mu > 0$, så har differentialekvationen bara den triviala lösningen $y(x) = 0$.

(c) Låt $\mu \neq 0$. Bestäm en partikulärlösning till differentialekvationen (2p)

$$y''(x) - \mu^2 y(x) = x$$

5 Låt $\boldsymbol{T}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildning (rotation) med standardmatrisen

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos(v) & -\sin(v) & 0 \\ \sin(v) & \cos(v) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Beräkna determinanten för $\boldsymbol{A}$. (2p)

(b) Låt $v = \frac{\pi}{4}$. Beräkna bilden av triangeln vars hörnpunkter ges av $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (3p)

och $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) Är avbildningen injektiv? (Motivera ditt svar). (2p)

(d) Följande matlabsekvens roterar och skalar om en tetraeder. Vi antar att tetraederns hörnpunkter finns lagrade i matrisen `H`. (3p)

```
v=pi/4;
A=[cos(v) -sin(v) 0;sin(v) cos(v) 0;0 0 1];
S=[5 0 0;0 2 0;0 0 1];
P1=A*H; P2=S*P1;
```

Antag att volymen på ursprungstetraedern (den vars hörnpunkter finns i `H`) är 1. Vad blir volymen på den tetraeder vars hörnpunkter finns i `P2`? (Motivera ditt svar).

Lycka till och God Jul !!

önskar Katarina