

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Katarina Blom, telefon 772 10 97
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Plats och tid: V, f.m.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.

Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.

Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamens-tillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

1 Låt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Visa att kolonnerna i $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende (5p)

(b) Vilken rang har $\mathbf{A}$ och vilken dimension har nollrummet till $\mathbf{A}$? (motivera ditt svar). (2p)

(c) Bestäm en 4×4 matris $\mathbf{C}$ sådan att rangen för matrisen $\mathbf{A} - \mathbf{C}$ är 3. (3p)

2 (a) Använd variabelsubstitution och bestäm $\int \cos(\sqrt{x}) \frac{\sqrt{x}}{2} dx$ (3p)

(b) Bestäm längden på kurvan $y = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ då $2 \leq x \leq 4$ (3p)

(c) Visa att $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx = 2 \int_0^1 e^{-x^2} dx$ (3p)

(d) Visa varför man får olika svar när man bestämmer en approximation till $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$ respektive $2 \int_0^1 e^{-x^2} dx$ med vänster rektangelregel och $h = 0.2$ (bredden på varje rektangel = 0.2) (4p)

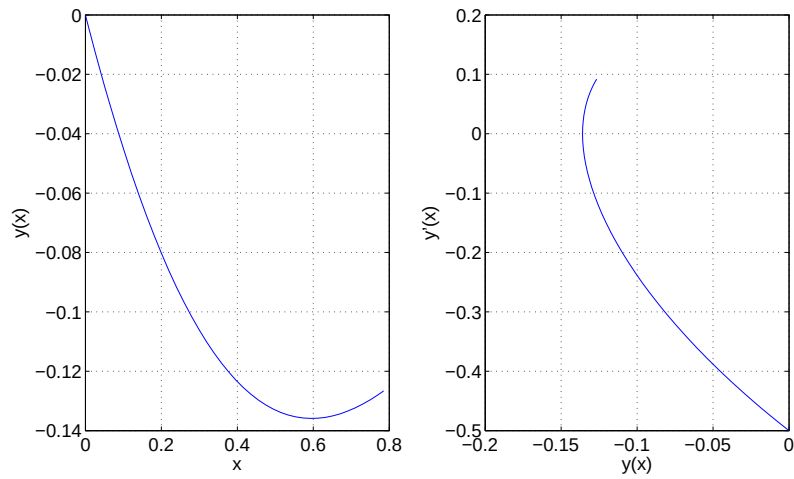
3 Låt

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin(x)$$

(a) Bestäm alla lösningar till differentialekvationen. (5p)
Ansätt $y_p = A x e^{-x} \cos(x) + B x e^{-x} \sin(x)$ för partikulärlösningen.

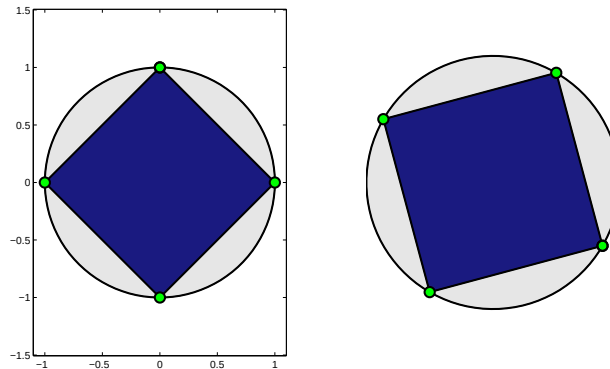
(b) Differentialekvationen har ordning två. Skriv om den till ett system av första ordningen. (3p)

(c) Man har löst differentialekvationen numeriskt med Matlab's `ode45` på intervallet $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ och ritat följande figurer: (4p)



Vilka begynnelsevärden har använts? Bestäm även konstanterna i homogenlösningen i (a).

- 4 I figuren till vänster nedan har man ritat en kvadrat innesluten i enhetscirkeln. Kvadratens hörn har koordinaterna $(0, 1), (1, 0), (0, -1)$ och $(-1, 0)$. I den högra figuren har kvadratens hörn roterats $\frac{\pi}{3}$ radianer moturs.



- (a) Härled en rotationsmatris $\mathbf{A}$ som transformerar (roterar) hörnkoordinaterna i kvadraten $\frac{\pi}{3}$ radianer moturs. (4p)
- (b) Använd rotationsmatrisen från (a) uppgiften och bestäm koordinaterna för kvadratens hörnpunkter i den högra figuren. (2p)
- (c) Visa att avbildningen är bijektiv (både injektiv och surjektiv). (3p)
- 5 (a) Lös differentialekvationen $y'(x) = 2xy(x)$ (3p)
- (b) Lös $y(x) = 2 + 2 \int_2^x ty(t)dt$ (3p)

Lycka till !!
önskar Katarina