

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Christoffer Standard, telefon 0703-088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Plats och tid: M, 8:30 - 12:30

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.

Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.

Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamens-tillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

1 Låt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm alla lösningar till ekvationen $\mathbf{A}\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$ (4p)

(b) Vilken rang har matrisen $\mathbf{A}$? (3p)

Vilken rang har matrisen $\mathbf{A} - 5\mathbf{I}$, där $\mathbf{I}$ är enhetsmatrisen?
Motivera dina svar.

(c) Låt $\mathbf{B}$ vara en godtycklig 2×2 -matris. Visa att om $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ så är $\mathbf{B} = \mathbf{0}$. (3p)

2 (a) Visa att (3p)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4x} dx$$

är konvergent.

(b) Dela upp i partialbråk och beräkna (4p)

$$\int \frac{2x + 3}{(x - 1)^2} dx$$

(c) Använd variabelsubstitution och beräkna (3p)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx$$

3 (a) Lös begynnelsevärdesproblemet (4p)

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

(b) Skriv om differentialekvationen i (a) till ett system av första ordningen. Uttryck ditt svar i matris-vektor produkt. (3p)

(c) Formulera Euler's metod för numerisk lösning av differentialekvationer. (3p)

4 Låt $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara en avbildning med standardmatrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

(a) Beräkna bilden av parallelogrammen som spänns upp av $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (3p)

Låt $\theta = \pi/2$.

(b) Visa att avbildningen roterar varje 2×1 vektor med en vinkel θ medurs. (3p)

(c) Skriv upp standardmatrisen för transformationen som roterar varje 2×1 vektor vinkeln θ moturs. (4p)

5 Integralvärdena

$$I_n = e^{-1} \int_0^1 e^x x^n dx, \text{ för } n = 0, 1, 2, \dots$$

kan beräknas med hjälp av rekursionsformeln

$$I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n \text{ med } I_0 = 1 - e^{-1}$$

(a) Det gäller dels att integralvärdena $I_n \geq 0$, och att $I_n \geq I_{n+1}$. Förklara varför. (3p)

(b) Bevisa att integralvärdena I_n kan beräknas med rekursionsformeln ovan. (4p)

(c) Man vill beräkna I_7 med rekursionsformeln ovan och har i Matlab skrivit följande for-loop: (3p)

```
I = 0.63;  
for n = 1:7  
    I = 1 - (n + 1)*I;  
end  
disp(I);
```

Svaret blir dock inte riktigt. Förklara varför. (*Ledning:* Det har med startvärdet på I att göra. $I_0 = 1 - e^{-1} = 0.63212\dots$)

Lycka till !!
önskar Katarina