

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Jakob Hultgren, telefon 0703-088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Plats och tid: V, e.m.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.

Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.

Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamens-tillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

L Ö S N I N G A R

1 Låt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

- (a) Beräkna en bas för nollrummet till matrisen. (5p)
- (b) Bestäm en bas för kolonnrummet. (3p)
- (c) Låt $\mathbf{B}$ bestå av de kolonner i $\mathbf{A}$ som *inte* är pivotkolonner. Bestäm rangen för $\mathbf{B}$. (2p)

-
- (a) Den utökade matrisen reduceras till trappstegsform

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Dvs x_2, x_4 och x_5 fria. Låt $x_2 = t_1, x_4 = t_2, x_5 = t_3$, vi får

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De tre vektorerna utgör en bas för nollrummet till $\mathbf{A}$.

- (b) Pivotkolonnerna $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

- (c) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -7 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ som har två pivotkolonner och alltså rang 2.
-

- 2 (a) Använd variabelsubstitution och beräkna (3p)

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$$

- (b) Visa att (4p)

$$2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

är divergent.

- (c) Beräkna volymen av den kropp som uppstår då $y = \frac{1}{x}$, $1 \leq x < \infty$ roterar kring x-axeln. (3p)

- (d) Formulera höger rektangelregel för numerisk beräkning av integraler. (3p)

(a) $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \left[\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{1}{1 + t^2} dt = \arctan t + C = \arctan(\sin(x)) + C$

(b) $\frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \geq \frac{1}{x}$ då $x \geq 1$ och $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ är divergent ty låt $K \geq 1$. Vi har $\int_1^K \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^K = \ln(x) \rightarrow \infty$ då $K \rightarrow \infty$

(c) Volymen $V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\infty = \pi \lim_{K \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{K}) = \pi$

- (d) Se litteraturen.

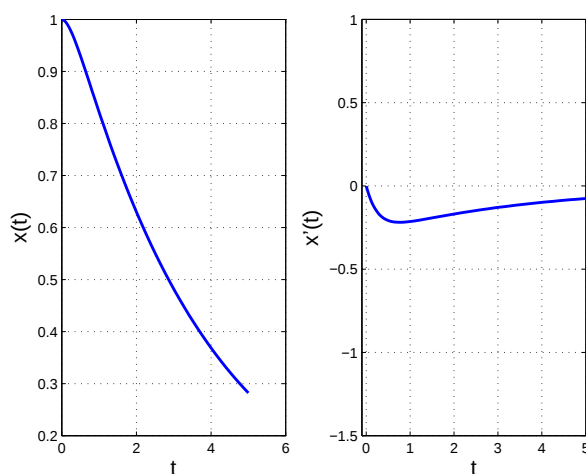
- 3 (a) Lös begynnelsevärdesproblemet (4p)

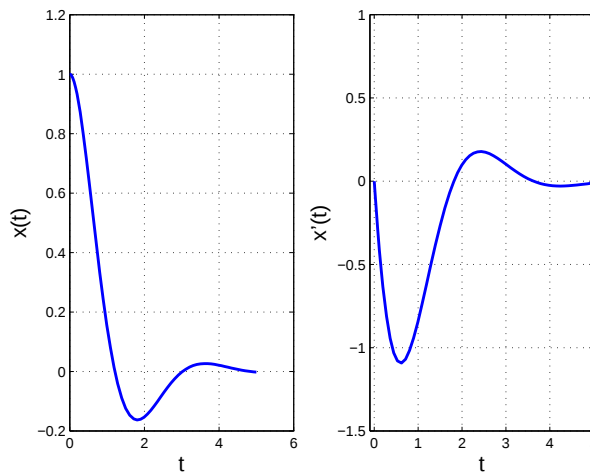
$$\begin{cases} y'(t) + 2ty(t) - t = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- (b) Betrakta differentialekvationen (4p)

$$x''(t) + 2ax'(t) + b^2x(t) = 0$$

där $a > 0$ och $b > 0$ är konstanter. Man har infört begynnelsevärden och löst differentialekvationen för $0 \leq t \leq 5$ numeriskt (i Matlab). Följande två figurpar har ritats.





I det ena figurparet har man använt $a = 1, b = 2$ och i det andra $a = 2, b = 1$. Vilka begynnelsevärden har använts? Vilka värden på a och b har använts i vilket figurpar? Motivera ditt svar.

- (c) Bestäm alla lösningar till $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 2 \sin t$ (4p)

- (a) Vi har första ordningen, linjär differentialekvation. Den integrerande faktorn blir e^{t^2} eftersom t^2 är en primitiv funktion till $2t$. Vi får

$$y(t)e^{t^2} = \int te^{t^2} dt + C = \frac{1}{2}e^{t^2} + C \Leftrightarrow y(t) = e^{-t^2} \frac{1}{2}e^{t^2} + e^{-t^2}C = \frac{1}{2} + e^{-t^2}C$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger $1 = \frac{1}{2} + C$, dvs $C = \frac{1}{2}$

- (b) Av figurerna framgår att $x(0) = 1$, och $x'(0) = 0$.

Karakteristiska polynomet är $r^2 + 2ar + b^2 = 0$.

För $a = 1, b = 2$ får vi $r^2 + 2r + 4 = 0$ med rötterna $r_1 = -1 + i\sqrt{3}$ och $r_2 = -1 - i\sqrt{3}$. Lösningen har utseendet $x(t) = e^{-t}(A \cos \sqrt{3}t + B \sin \sqrt{3}t)$. Vi får alltså en oscillerande rörelse, vilket är det nedre figurparet.

För $a = 2, b = 1$ får vi $r^2 + 4r + 1 = 0$ med rötterna $r_1 = -2 + \sqrt{3}$ och $r_2 = -2 - \sqrt{3}$. Lösningen har utseendet $x(t) = (Ae^{(-2+\sqrt{3})t} + Be^{(-2-\sqrt{3})t})$ vilket är det övre figurparet.

- (c) Karakteristiska polynomet $r^2 + 2r + 1 = 0$ har dubbelroten $r = -1$ och vi får homogenlösningen $x_h = (At + B)e^{-t}$.

För partikulärlösningen används sinusreceptet. Låt $x_p = A \cos(t) + B \sin(t)$, vi får $x'_p = -A \sin(t) + B \cos(t)$, $x''_p = -A \cos(t) - B \sin(t)$ och

$$x''_p + 2x'_p + x_p = -A \cos(t) - B \sin(t) + 2(-A \sin(t) + B \cos(t)) + A \cos(t) + B \sin(t) = 2B \cos(t) - 2A \sin(t)$$

Vi vill alltså att $2B \cos(t) - 2A \sin(t) = 2 \sin(t)$. Vi får $A = -1$ och $B = 0$. Dvs $x_p = -\cos(t)$.

Den fullständiga lösningen blir alltså $x = x_h + x_p = (At + B)e^{-t} - \cos(t)$

- 4 (a) Beräkna kvoten $\frac{4-i}{2+3i}$ (3p)

- (b) Skissa mängden av alla punkter z i det komplexa talplanet (3p)

- (c) Låt z och w vara två komplexa tal med argumenten ϕ respektive θ och absolutbeloppen 1. Visa att argumentet för produkten zw är $(\phi + \theta)$ (3p)

(a) $\frac{4-i}{2+3i} = \frac{(4-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{5-14i}{4+9} = \frac{5}{13} - \frac{14}{13}i$

(b) Alla punkter z utgör en cirkel med centrum i punkten $3i$ och med radien 2 i det komplexa talplanet.

(c) $zw = (\cos \phi + i \sin \phi)(\cos \theta + i \sin \theta) = (\cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta) + i(\cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \theta) = \cos(\phi + \theta) + i \sin(\phi + \theta)$

5 Låt $\mathbf{D}$ vara en 2×20000 -matris med koordinater i planet och låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara två 2×2 standardmatriser för olika linjära avbildningar. (3p)

(a) Följande matlabsekvens beräknar transformationen $\mathbf{ABD}$ på två olika sätt.

$\mathbf{Dn} = \mathbf{A} * (\mathbf{B} * \mathbf{D}) ;$

$\mathbf{Dm} = (\mathbf{A} * \mathbf{B}) * \mathbf{D} ;$

Hur många produkter av matriselement utförs då man beräknar $\mathbf{Dn}$ respektive $\mathbf{Dm}$.

(b) Antag $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ Bestäm $\mathbf{A}$. (3p)

(a) $\mathbf{Dn}$: $4 * 20\ 000 + 4 * 20\ 000 = 160\ 000$ produkter.

$\mathbf{Dm}$: $8 + 4 * 20\ 000 = 80\ 008$ produkter.

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 13 \\ -8 & 27 \end{bmatrix}$

Lycka till !!

önskar Katarina